Algèbres de Hecke, cristaux et bases canoniques de groupes quantiques.

Nicolas Jacon

Année 2010

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Nicolas Jacon

Université de Franche-Comté

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Algèbres de Hecke, cristaux et bases canoniques de groupes quantiques.

8 Juin 2010

Devant le Jury composée de

M. Cédric BONNAFÉ,	Université de Franche-Comté,	Examinateur,
M. Meinolf GECK,	Université d'Aberdeen,	Examinateur,
M. Iain GORDON,	Université d'Edimbourg,	Rapporteur,
M. Bernard LECLERC,	Université de Caen,	Examinateur (Président du Jury),
M. Cédric LECOUVEY,	Université de Tours,	Examinateur,
M. Raphaël ROUQUIER,	Université d'Oxford,	Rapporteur,
M. Jean-Yves THIBON,	Université de Marne la Vallée,	Rapporteur.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Soit W un groupe de Weyl fini. On peut alors associer à W son "algèbre de Hecke" $\mathcal{H}_k(W)$, définie sur un corps k. La base standard de cette algèbre (vue donc comme k-espace vectoriel) est indexée par les éléments de W et la multiplication entre deux de ses éléments est "déformée" grâce à l'introduction d'un paramètre additionnel $q \in k^\times$. Lorsque l'on pose $q = 1$, $\mathcal{H}_k(W)$ n'est autre que l'algèbre de groupe $k[W]$. A ce titre, $\mathcal{H}_k(W)$ peut être vue comme une "généralisation" de l'algèbre du groupe de Weyl W. Une des motivations à l'étude de ces algèbres provient de la théorie des groupes réductifs finis. Soit G est un groupe de Chevalley défini sur le corps fini à q éléments de groupe de Weyl W et soit B un sous-groupe de Borel de G (l'exemple classique est le cas où $G = GL_n(q)$, W est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et où B est le sous-groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures). Considérons le module de permutation $k[G/B]$, alors Iwahori a montré que $\mathrm{End}_G(k[G/B])$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke de W pour un certain choix de paramètres. On trouve également des connexions importantes avec

1. la géométrie de la variété des drapeaux d'un groupe réductif,
2. la théorie des noeuds (via les polynômes de Jones),
3. les algèbres de Schur et leurs représentations,
4. les algèbres de Hecke affines et ainsi la "conjecture de Deligne-Langlands" et ses variantes,
5. la théorie des bases cristallines et des bases canoniques de groupes quantiques,
6. les algèbres de Cherednik via le foncteur KZ.

Citons enfin la conjecture de James (et ses récentes généralisations par Fayers, Geck et Müller) qui établit un lien entre les représentations modulaires du groupe symétrique (représentations qui restent encore mystérieuses) et les représentations de son algèbre de Hecke.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons en premier lieu aux représentations irréductibles de ces algèbres. Les problèmes de départ sont les suivants : y a t-il un moyen simple et naturel de paramétrer ces représentations ? est-il possible de trouver leurs dimensions ? et des formules de caractères associées ? Ces questions admettent des réponses simples et positives lorsque l'algèbre de Hecke est semi-simple. En effet, supposons donc que l'on ait un corps k tel que $\mathcal{H}_k(W)$ soit semi-simple (et déployée), le théorème de déformation de Tits affirme alors que les représentations irréductibles $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_k(W))$ de $\mathcal{H}_k(W)$ sont en bijection naturelle avec celles de W. On peut donc indexer les modules simples de $\mathcal{H}_k(W)$ par un ensemble Λ indexant lui-même l'ensemble $\mathrm{Irr}(k[W])$, l'ensemble des modules simples de W :

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_k(W)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(k[W]) \longleftrightarrow \Lambda.$$

En principe, on dispose d'une caractérisation pour l'ensemble Λ. De plus, les dimensions des représentations restent inchangées via cette bijection. Des formules de caractères sont enfin disponibles. Bref, les problèmes ci-dessus sont résolus dans le cas semi-simple. Que se passe t-il maintenant lorsque l'algèbre n'est pas semi-simple ? Dans ce cas, une telle bijection n'existe pas et il faut développer de nouvelles méthodes pour résoudre ce problème, en particulier introduire un nouvel objet : la matrice de décomposition.

Cette matrice D contrôle la théorie des représentations de $\mathcal{H}_k(W)$ dans le sens suivant : elle lie les modules simples d'une algèbre de Hecke semi-simple (modules simples indexant les lignes de D) avec les modules simples de $\mathcal{H}_k(W)$ (modules simples indexant les colonnes de D). En caractéristique 0, M. Geck et R. Rouquier ont montré que pour tout groupe de Weyl W, la matrice de décomposition a une "forme triangulaire" avec des 1 sur la diagonale, pour un "bon" ordre des lignes et colonnes. Ces résultats utilisent de façon cruciale la théorie de Kazhdan-Lusztig disponible pour ce type d'algèbres et permet d'indexer naturellement $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_k(W))$ par un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de Λ.

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_k(W)) \longleftrightarrow \mathcal{B} \subset \Lambda$$

Cet ensemble est appelé un ensemble basique.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \mathcal{B} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \Lambda$$

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous définissons ces ensembles et nous expliquons comment on arrive à leurs existences pour tout groupe de Weyl. Une première étape consiste à étudier le cas des paramètres positifs en caractéristique 0 où les résultats de Geck et Geck-Rouquier s'appliquent. Sous certaines conjectures, il est alors possible de déterminer les ensembles basiques en caractéristique positive en se servant des données de la caractéristique 0 (travail exposé dans (5)). Le cadre général des paramètres non nécessairement positifs s'obtient grâce à une étude de la structure d'algèbre symétrique des algèbres de Hecke (travail commun avec M. Chlouveraki (18)).

Une fois l'existence de ces ensembles basiques connue, de nouvelles questions se posent alors, en particulier, peut-on déterminer explicitement ces ensembles basiques, sous-ensembles de Λ ? Qu'en est-il de la caractéristique positive ? Peut-on aussi prouver l'existence d'ensemble basique dans le cadre de groupes de réflexions complexes ? La détermination explicite des ensembles basiques présente en effet un double intérêt :

– elle permet de déterminer une indexation explicite des modules simples,
– elle permet de trouver des propriétés sur la matrice de décomposition.

En types exceptionnels, on peut se servir des tables explicites des matrices de décomposition données par Geck, Lux et Müller. Il nous reste donc à étudier les cas des types A_{n-1}, B_n et D_n. Pour les deux premiers types, un théorème fondamental permet de donner des informations sur la matrice de décomposition : le théorème d'Ariki (preuve et généralisation de la conjecture de Lascoux-Leclerc-Thibon). Ce résultat ne s'applique pas seulement aux types A_{n-1} et B_n mais à l'ensemble, plus large, des groupes de réflexions complexes de type $G(l,1,n)$. Il existe également des algèbres de Hecke associées à ces groupes appelés algèbres d'Ariki-Koike. Le théorème d'Ariki (précisé dans l'introduction du troisième chapitre) affirme alors que les matrices de décomposition de ces algèbres sont exactement les évaluations en $v = 1$ des matrices des bases canoniques pour les $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-modules irréductibles de plus haut poids.

Une stratégie naturelle afin de résoudre les problèmes exposés ci-dessus consiste donc à obtenir des informations sur les modules irréductibles pour le groupe quantique $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$. C'est le but du troisième chapitre de ce mémoire où nous nous intéressons à ces objets indépendamment de leur applications aux algèbres de Hecke. En type A_{n-1}, l'algorithme de Lascoux-Leclerc-Thibon permet de déterminer les bases canoniques dans un cas particulier : le cas où le poids donné est un poids fondamental (on parle alors de module de niveau 1). Nous généralisons cet algorithme afin de permettre le calcul des bases canoniques d'un module irréductible de plus haut poids arbitraire (travail exposé dans (3) et (4), implémenté dans (22)). Il est possible d'attacher à ces modules un objet fondamental qui code certaines propriétés de celui-ci : le cristal. Entre autres, cet objet permet d'indexer naturellement les éléments de la base canonique. Nous étudions ici cet objet et montrons en particulier qu'il s'injecte naturellement dans le cristal d'un module irréductible de plus haut poids pour le groupe quantique $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$ (travail exposé dans (11), généralisé dans (16) en commun avec C. Lecouvey). On peut alors obtenir certaines informations importantes du cristal initial grâce aux cristaux associés à $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$ qui sont plus aisés à décrire. Ce résultat a son pendant dans la théorie des bases canoniques où nous montrons que les bases canoniques des $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-modules de plus haut poids se factorisent par les bases canoniques des $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules de plus haut poids (travail en commun avec S. Ariki et C. Lecouvey (20)).

Dans le quatrième chapitre, nous traduisons les résultats obtenus en termes de représentations d'algèbres de Hecke et d'Ariki-Koike, en nous servant du théorème d'Ariki. Nous déterminons tout d'abord les ensembles basiques dans le cas des groupes de Weyl de type A et B puis dans le cas des groupes de réflexions complexes de la série $G(l,1,n)$ (voir (10) et le travail en commun avec M. Geck (7)). Notons que dans (22), est traité essentiellement le cas des paramètres égaux (et positifs). Dans le cadre général, nous montrons que les paramétrisations des ensembles basiques correspondent exactement aux paramétrisations naturelles des bases canoniques obtenues grâce à la théorie des cristaux. Le problème du type D_n (voir (2)) ou plus généralement de la série $G(l,p,n)$ est ensuite résolu en se servant des résultats précédents et de propriétés obtenues par la théorie de Clifford (travail en commun avec G. Genet (8)). En fait, en utilisant la fonction de poids liée à une algèbre de Hecke, on peut montrer que la théorie des ensembles basiques fournit plusieurs indexations possibles pour le même ensemble de modules simples. Nous étudions ensuite les bijections entres ces différentes indexations. Nous montrons en particulier que ces bijections sont en quelque sorte contrôlées par la matrice de certaines représentations remarquables des groupes de Weyl : les représentations constructibles (voir (19)). Tout ceci admet des interprétations parfois conjecturales en termes de théorie de Kazhdan-Lusztig et de structures cellulaires en type B (travail en commun avec C. Bonnafé (13))

Le cinquième chapitre de ce mémoire présente quelques résultats additionnels liés à la théorie des représentations d'algèbres de Hecke et d'algèbres d'Ariki-Koike. Tout d'abord, les représentations irréductibles d'algèbres de Hecke de type B_n sont naturellement paramétrées par certaines paires de partitions appelées les bipartitions Kleshchev. En général, il est difficile d'obtenir une caractérisation simple de ce type de bipartitions. Nous présentons ici un résultat commun avec S. Ariki (15) donnant une preuve purement combinatoire d'une conjecture de Dipper, James et Murphy caractérisant ces bipartitions Kleshchev. Il existe une généralisation de ces bipartitions à l'ensemble des multipartitions : les multipartitions Kleshchev. Celles-ci indexent les modules simples des algèbres d'Ariki-Koike. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons à une certaine involution sur ces multipartitions. Celle-ci généralise l'involution de Mullineux du groupe symétrique aux groupes de réflexions complexes. Nous donnons ainsi une description explicite de cette application en utilisant certains résultats du troisième chapitre (travail en commun avec C. Lecouvey (15)). Le cinquième chapitre contient également des résultats concernant la théorie des représentations des algèbres de Hecke affines de type A. Ces algèbres sont intimement reliés avec les algèbres d'Ariki-Koike dans le sens où toute algèbre d'Ariki-Koike est un quotient d'une algèbre de Hecke affine de type A. Les modules simples de ces algèbres sont naturellement indexés par une certaine classe d'objets appelés les multisegments. Nous donnons ici la règle de branchement modulaire pour ces algèbres de deux manières différentes : géométrique et combinatoire (travail en commun avec S. Ariki et C. Lecouvey (17)). Nous étudions également l'analogue de l'involution de Mullineux pour ce type d'algèbre : l'involution de Zelevinsky que nous décrivons explicitement dans un travail en commun avec C. Lecouvey (14), en généralisant des résultats de Moeglin-Waldspurger et de Leclerc-Thibon-Vasserot. Nous établissons en particulier l'égalité avec une involution remarquable du cristal : l'involution de Kashiwara.

1.2 Liste des publications

1.2.1 Articles parus ou à paraître

(1) M. Geck et N. Jacon, *Ocneanu's trace and Starkey's rule*, J. Knot Theory Ramifications, 12 (2003), no. 7, 899-904.

(2) N. Jacon, *Sur les nombres de décomposition des algèbres de Hecke de type D_n*, J. Algebra, 274 (2004), no. 2, 607-628.

(3) N. Jacon, *On the parametrization of the simple modules for Ariki-Koike algebras*, Journal of Math. of Kyoto Univ, 44 (2004), no. 4, 729-767.

(4) N. Jacon, *An algorithm for the computation of the decomposition matrices for Ariki-Koike algebras*, J. Algebra (section Comp. Algebra) 292 (2005), 100-109.

(5) N. Jacon, *Canonical basic sets for Hecke algebras*, Contemp. Math., 392 (2005), 33-41.

(6) N. Jacon, *JMMO Fock space and Geck-Rouquier classification of simple modules for Hecke algebras,* Kyoto RIMS Kokyuroku, 1438 (2005), 19-36.

(7) M. Geck et N. Jacon, *Canonical basic sets in type B_n*, J. Algebra 306 (2006), 104-127.

(8) G. Genet et N. Jacon, *Modular representations of cyclotomic Hecke algebras of type $G(l,p,n)$*, Int. Math. Res. Notices, Volume 2006 (2006), Article ID 93049, 18 pages

(9) N. Jacon, *Calcul explicite de certaines cellules de Kazhdan-Lusztig pour le type A*, Décembre 2006, Publications Mathématiques de Besançon.

(10) N. Jacon, *Crystal graphs of higher level q-deformed Fock spaces, Lusztig a-values and Ariki-Koike algebras*, Algebras and Rep. Theory **10** (2007), 565–591.

(11) N. Jacon, *Crystal graphs of irreducible highest weight $\mathcal{U}_v(\widehat{sl}_e)$-modules of level two and Uglov bipartitions*, J. Algebraic Combinatorics, Vol. 27, no. 2 (2008) 143-162.

(12) N. Jacon et C. Lecouvey, *On the Mullineux involution for Ariki-Koike algebras*, J. Algebra (section Comp. Algebra) 321 (2009), 2156-2170.

(13) C. Bonnafé et N. Jacon, *Cellular structures on Hecke algebras of type B_n*, J.

Algebra, 321 (2009), 3089-3111.

(14) N. Jacon et C. Lecouvey, *Kashiwara and Zelevinsky involutions in affine type A*, Pacific J. Math., Vol. 243, No. 2, (2009), 287-311.

(15) S. Ariki et N. Jacon, *Dipper-James-Murphy's conjecture for Hecke algebras of type B_n*, accepté à Progress in Math. Birkauser, "Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups" 2007, http://arXiv.org/abs/math.RT/0703447.

(16) N. Jacon et C. Lecouvey, *Crystal isomorphisms for irreducible highest weight $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-modules of higher level*, accepté à Algebras and Rep. Theory, 2008, http://arXiv.org/abs/math.RT/0706.0680.

1.2.2 Prépublications

(17) S. Ariki, N. Jacon et C. Lecouvey, *The modular branching rule for affine Hecke algebras of type A*, prépublication 2008, http://arxiv.org/abs/0808.3915.

(18) M. Chlouveraki et N. Jacon, *Schur elements and basic sets for cyclotomic Hecke algebras*, prépublication 2009, http://arxiv.org/abs/0910.4931.

(19) N. Jacon, *Constructible representations and basic sets in type B_n*, prépublication 2009, http://arxiv.org/abs/0911.1286.

(20) S. Ariki, N. Jacon et C. Lecouvey, *Factorization of the canonical bases for higher level Fock spaces*, prépublication 2010, http://arxiv.org/abs/0909.2954

1.2.3 Livre

(21) M. Geck et N. Jacon, *Irreducible Representations of Hecke algebras at roots of unity*, en cours d'écriture, dépôt prévu Juillet 2010 (projet de livre accepté par Springer Verlag)

1.2.4 Thèse

(22) N. Jacon, *Représentations modulaires des algèbres de Hecke et des algèbres d'Ariki-Koike*, thèse de doctorat, 2004, Institut Girard Desargues Lyon I, sous la direction de Meinolf Geck.

1.2.5 Programmation informatique

(23) N. Jacon, *Programme GAP pour le calcul de la base canonique d'un $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module irréductible et pour les matrices de décomposition d'algèbres de Arki-Koike*, 2004, page web du projet CHEVIE http://www.math.rwth-aachen.de/CHEVIE

Chapitre 2

Ensembles basiques pour les algèbres de Hecke

Dans ce chapitre, Nous introduisons tout d'abord l'algèbre de Hecke d'un groupe de réflexions complexes. Le principal objectif est d'étudier la théorie des représentations de ces algèbres en particulier dans le cas modulaire, c'est-à-dire lorsque l'algèbre n'est pas semi-simple. Pour ceci, étant donné un groupe de réflexions complexes W, nous définissons une algèbre de Hecke particulière : l'algèbre de Hecke cyclotomique $\mathcal{H}$. Celle-ci possède les propriétés fondamentales suivantes :

- C'est une déformation de l'algèbre du groupe W en un paramètre q.
- Sur un corps suffisamment gros, elle est semi-simple et déployée.
- C'est une algèbre symétrique, c'est-à-dire qu'elle est équipée d'une certaine fonction de trace symétrisante.
- Si on spécialise l'indéterminée q, on obtient une algèbre déployée mais non semi-simple en général.

Les deux premières propriétés montrent que la théorie des représentations de $\mathcal{H}$ se déduit, dans une certaine mesure, de la théorie des représentations de W (via le théorème de déformation de Tits) tandis que les deux suivantes montrent l'existence d'algèbres spécialisées qui déforment W mais qui, tout en étant reliées à $\mathcal{H}$ via la matrice de décomposition, ont une théorie des représentations beaucoup plus complexe en général. L'objectif de ce chapitre (et d'une partie des suivants) est d'étudier les problèmes soulevés par ces faits. Pour ceci, nous nous plaçons dans le cadre le plus général possible dans la première partie (en suivant essentiellement le point de vue de [19]) avant de donner des résultats plus spécifiques.

2.1 Algèbres de Hecke et spécialisations cyclotomiques

Soit K une extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$ et soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit W un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des pseudo-réflexions ($i.e$ un groupe de réflexions complexes) et agissant de manière irréductible sur V. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des hyperplans de réflexions. On pose $V^{\mathrm{reg}} := V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H_{\mathbb{C}}$. Pour $x_0 \in V^{\mathrm{reg}}$, on définit $B := \Pi_1(V^{\mathrm{reg}}/W, x_0)$ le groupe de tresses associé. Pour toute orbite $\mathcal{C}$ de W sur $\mathcal{A}$, on note $e_{\mathcal{C}}$ l'ordre commun des sous-groupes W_H, où $H \in \mathcal{C}$ et W_H est le sous-groupe de W contenant toutes les réflexions qui fixent H. On se donne maintenant un ensemble d'indéterminées $\mathbf{u} = (u_{\mathcal{C},j})_{(\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W, 0\leq j\leq e_{\mathcal{C}}-1)}$ et on note $\mathbb{Z}[\mathbf{u},\mathbf{u}^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent en les indéterminées $\mathbf{u}$. Suivant [18, Ch. 4] et [10, Th. 0.1], le groupe B est engendré par un ensemble fini de réflexions complexes :

$$\bigsqcup_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W} \mathbf{S}_{\mathcal{C}}$$

où pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$, on note $\mathbf{S}_{\mathcal{C}} = \{\mathbf{s}_1^{\mathcal{C}}, \dots, \mathbf{s}_{n_{\mathcal{C}}}^{\mathcal{C}}\}$.

L'algèbre de Hecke générique $\mathcal{H} := \mathcal{H}(W)$ est le quotient de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_K[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]B$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$(\mathbf{s} - u_{\mathcal{C},0})(\mathbf{s} - u_{\mathcal{C},1}) \dots (\mathbf{s} - u_{\mathcal{C},e_{\mathcal{C}}-1}),$$

où $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et $\mathbf{s}$ parcourt l'ensemble des générateurs de monodromie autour des images dans V^{reg}/W des éléments de l'orbite d'hyperplans $\mathcal{C}$. Dans tout ce mémoire, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse. *L'algèbre $\mathcal{H}$ est libre comme $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$-module et de rang $|W|$. On suppose de plus qu'il existe une fonction de trace symétrisante t satisfaisant certaines conditions [15, §2.A].*

Le résultat est en particulier vrai pour les groupes de réflexions qui nous intéressent dans ce mémoire, à savoir :
- les groupes de Weyl,
- les groupes de réflexions complexes de la série infinie $G(l, p, n)$ (avec p divisant l), *i.e* le groupe des matrices monomiales $n \times n$ tel que les coefficients non nuls sont des racines l-ième de l'unité et leur produit est une racine de l'unité d'ordre divisant l/p.

Afin d'étudier la théorie des représentations de ce type d'algèbres, nous devrons dans un premier temps travailler avec une algèbre semi-simple déployée. Pour ceci, fixons quelques notations :
- Soit $\mu(K)$ le groupe des racines de l'unité dans K,
- Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $\eta_d := \exp(\dfrac{2i\pi}{d})$,
- Pour toute orbite $\mathcal{C}$ et pour tout $j = 0, \dots, e_{\mathcal{C}} - 1$, on pose $v_{\mathcal{C},j}^{|\mu(K)|} = \eta_{e_{\mathcal{C}}}^{-j} u_{\mathcal{C},j}$.

Un résultat de Malle [71, Thm. 5.2] montre que l'algèbre $K(\mathbf{v})\mathcal{H}$ est semi-simple déployée, où on a noté $\mathbf{v} = (v_{\mathcal{C},j})_{(\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W)(0\leq j\leq e_{\mathcal{C}}-1)}$. La seconde étape consiste à étudier une algèbre à une indéterminée. Pour ceci, nous allons considérer certaines spécialisations remarquables de l'algèbre générique : les spécialisations cyclotomiques. Soit y une indéterminée et soit $q := y^{|\mu(K)|}$. On se donne des éléments $m_{\mathcal{C},j} \in \mathbb{Z}$ et on considère un morphisme

$$\varphi_{\mathbf{m}} : \mathbb{Z}_K[\mathbf{v}, \mathbf{v}^{-1}] \to \mathbb{Z}_K[y, y^{-1}],$$

tel que $\varphi_{\mathbf{m}}(u_{\mathcal{C},j}) = \eta_{e_{\mathcal{C}}}^{j} q^{m_{\mathcal{C},j}}$ pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et $j = 0, 1, \dots, e_{\mathcal{C}} - 1$.

L'algèbre spécialisée via ce morphisme est la $\mathbb{Z}_K[y, y^{-1}]$-algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ appelée algèbre de Hecke cyclotomique. C'est cette algèbre et ses spécialisations que nous allons étudier en priorité dans ce mémoire. Tout d'abord, on sait que l'algèbre $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}} := K(y) \otimes_{\mathbb{Z}_K[y,y^{-1}]} \mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ est semi-simple déployée par [18, §2A]. A ce titre, par le théorème de déformation de Tits, les modules simples de cette algèbre sont en bijection avec ceux de l'algèbre du groupe de réflexions complexes et la théorie des représentations est alors relativement bien comprise [3, 46]. Soit Λ un ensemble indexant les modules simples de l'algèbre de groupe $K[W]$. On peut donc écrire :

$$\mathrm{Irr}(K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}) = \{V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\}.$$

Une question immédiate se pose alors : qu'en est-il des spécialisations de cette algèbre ? Autrement dit, si on spécialise l'indéterminée y dans un corps de caractéristique 0 ou positive, peut-on obtenir une description explicite des modules simples de l'algèbre associée ? Calculer les dimensions des représentations irréductibles ? etc. C'est ce type de questions que nous étudions dans les sections suivantes.

2.2 Matrices de décomposition et ensembles basiques

Gardons les notations de la section précédente. On va s'intéresser aux spécialisations de l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$. Soit donc $\theta : \mathbb{Z}_K[y, y^{-1}] \to k$ un morphisme d'anneaux tel que $\theta(q) = \xi \in k^{\times}$. On peut supposer, quitte à étendre les scalaires à une extension finie, que l'algèbre $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}} := k \otimes_{\mathbb{Z}_K[y,y^{-1}]} \mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ est déployée.

Soit $R_0(K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}})$ (respectivement $R_0(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})$) le groupe de Grothendieck des $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-modules (respectivement $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-modules) de type fini. Le groupe est engendré par les classes $[U]$ des $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-modules simples (respectivement $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-modules simples) U. On obtient une application de décomposition bien définie :

$$d_{\theta}^{\mathbf{m}} : R_0(K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}) \to R_0(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})$$

telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a

$$d_{\theta}^{\mathbf{m}}([V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}]) = \sum_{M \in \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})} [V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}} : M][M].$$

On se réfère à [32] ou [38, §7.4] pour la définition. La matrice

$$D_{\theta}^{\mathbf{m}} = \left([V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}} : M]\right)_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda,\, M \in \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})}$$

est la *matrice de décomposition associée à* θ. Elle code les représentations de $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ en fonction de celles de $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations d'algèbres de Hecke consiste à déterminer explicitement cette matrice. En général, il s'agit d'un problème délicat que l'on peut affaiblir en s'intéressant seulement, dans un premier temps, à la forme de cette matrice. La théorie des ensembles basiques développée par M. Geck dans [30], M. Geck et R. Rouquier dans [40] et exposée dans [36] permet d'établir des résultats intéressant en ce sens.

L'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ a une structure d'algèbre symétrique. On a donc une fonction de trace "canonique" $\tau : \mathcal{H}_{\mathbf{m}} \to \mathbb{Z}_K[y, y^{-1}]$ qui s'étend à l'algèbre $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ et qui ainsi permet la définition d'une trace $\tau_K : K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}} \to K(y)$. Celle-ci se décompose comme suit : il existe des polynômes de Laurent appelés éléments de Schur tels que

$$\tau_K = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \frac{1}{s_{\boldsymbol{\lambda}}} \chi_{\boldsymbol{\lambda}},$$

où $\chi_{\boldsymbol{\lambda}}$ est le caractère de la représentation associée au $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-module irréductible $V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}$. Ces polynômes jouent un rôle fondamental dans la théorie des représentations de ces algèbres. Entre autres, ils permettent la définition de la a-fonction de Lusztig comme suit. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, on peut montrer qu'il existe $f_{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0$ tel que

$$s_{\boldsymbol{\lambda}} = f_{\boldsymbol{\lambda}} q^{-a_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{m}}} + \text{ plus grandes puissances de } q.$$

On obtient ainsi une fonction

$$\begin{array}{rccc} a^{\mathbf{m}} : & \Lambda & \to & \mathbb{Z} \\ & \boldsymbol{\lambda} & \mapsto & a_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{m}} \end{array}$$

appelée la a-fonction de Lusztig. Ce n'est pas la seule manière de définir une telle fonction. On peut, de manière alternative, la définir en utilisant les bases de Kazhdan-Lusztig dans le cas des groupes de Weyl à paramètres égaux. Voici maintenant la définition d'un ensemble basique.

Definition 2.2.1. On dit que $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ admet un ensemble basique $B_{\mathbf{m}}(\theta) \subset \Lambda$ associé à la spécialisation θ si les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $M \in \operatorname{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})$ il existe $\boldsymbol{\lambda}_M \in \mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta)$ tel que
$$[V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}_M} : M] = 1 \text{ et } a_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathbf{m}} > a_{\boldsymbol{\lambda}_M}^{\mathbf{m}} \text{ si } [V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\mu}} : M] \neq 0 \text{ et } \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\lambda}.$$
2. L'application
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}) & \to & \mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) \\ M & \mapsto & \boldsymbol{\lambda}_M \end{array}$$
est une bijection.

Supposons que W soit un groupe de Weyl. Ainsi, on a $e_{\mathcal{C}} = 2$ pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$. Les relations des générateurs satisfont pour tout $i = 1, \ldots, n_{\mathcal{C}}$:
$$(\mathbf{s}_i^{\mathcal{C}} - q^{m_{\mathcal{C},0}})(\mathbf{s}_i^{\mathcal{C}} + q^{m_{\mathcal{C},1}}) = 0.$$
Le résultat fondamental suivant établit l'existence d'ensembles basiques et nécessite la théorie de Kazhdan-Lusztig, dont certaines propriétés sont encore seulement conjecturales dans certains cas. Nous aurons donc ici besoin d'admettre la véracité d'une série de conjectures (**P1** $-$ **P15**) de Lusztig [70, Conj. 14.2], celles-ci sont démontrées dans les cas suivants :

– dans le cas des paramètres égaux, c'est-à-dire lorsque $m_{\mathcal{C},0} - m_{\mathcal{C},1} = m_{\mathcal{C}',0} - m_{\mathcal{C}',1} \in \mathbb{N}$ pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$, $\mathcal{C}' \in \mathcal{A}/W$.
– en type B_n dans le cas dit asymptotique, c'est-à-dire lorsque $m_{\mathcal{C}_1,0} - m_{\mathcal{C}_1,1} >> m_{\mathcal{C}_2,0} - m_{\mathcal{C}_2,1} \geq 0$ (voir la présentation dans §4.1).

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2.2.2 (Geck [30], Geck-Rouquier [40], Geck-Jacon [35], Chlouveraki-Jacon [19])**.** *Soit W est un groupe de Weyl. En gardant les notations ci-dessus, on suppose*

1. *soit que les conjectures de Lusztig sont vérifiées,*
2. *soit que k est de caractéristique* 0.

Alors pour toute spécialisation θ, $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ admet un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta)$ associé à la spécialisation θ.

La preuve de l'existence d'ensembles basiques (par Geck et Geck-Rouquier) obtenue en supposant les conjectures de Lusztig est une preuve générale utilisant la théorie de Kazhdan-Lusztig et en particulier les propriétés de l'algèbre asymptotique de Lusztig. Si on se place en caractéristique 0, la démonstration se fait au cas par cas en utilisant en particulier la théorie d'Ariki-Lascoux-Leclerc-Thibon.

La "factorisation de l'application de décomposition" obtenue par M. Geck et R. Rouquier [39] permet d'obtenir des résultats concernant la caractéristique p et son lien avec la caractéristique 0 (voir une version de cette factorisation exposée au Théorème 3.4.1). Si $\theta_p : A \to k$ est une spécialisation dans un corps de caractéristique p (caractéristique que l'on suppose bonne pour W), on pose
$$e = \min(i \geq 2 \mid 1 + \theta_p(q) + \ldots + \theta_p(q)^{i-1}),$$
et on considère une spécialisation θ dans un corps de caractéristique 0 tel que $\theta(q)$ est une racine de l'unité d'ordre e. Alors :

Proposition 2.2.3 (Jacon [55])**.** *Soit W est un groupe de Weyl. En gardant les notations ci-dessus, on suppose de plus que les conjectures de Lusztig sont vérifiées. Alors on a $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta_p) = \mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta)$.*

Une fois l'existence des ensembles basiques prouvée, il est naturelle d'essayer d'obtenir une paramétrisation explicite de ceux-ci. Pour ceci, une étude approfondie des éléments de Schur et de la a-fonction semble nécessaire. C'est le but de la prochaine section. Ceci nous permetra dans un premier temps d'établir des connexions entre différents ensembles basiques.

2.3 Eléments de Schur

On se place ici dans le cadre d'un groupe de réflexions complexes W quelconque. On garde toutes les notations de la première section. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$, on a une action naturelle du groupe cyclique $\mathbb{Z}/e_{\mathcal{C}}\mathbb{Z}$ engendré par $\sigma_{\mathcal{C}}$ sur $\mathbb{Z}^{e_{\mathcal{C}}}$ comme suit :

$$\sigma_{\mathcal{C}} : \mathbf{m}_{\mathcal{C}} = (m_{\mathcal{C},0},\, m_{\mathcal{C},1},\, \ldots,\, m_{\mathcal{C},e_{\mathcal{C}}-1}) \mapsto \sigma_{\mathcal{C}}.\mathbf{m}_{\mathcal{C}} := (m_{\mathcal{C},1},\, m_{\mathcal{C},2},\, \ldots,\, m_{\mathcal{C},0}) \,.$$

Ceci induit une action du groupe $G := \prod_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W} (\mathbb{Z}/e_{\mathcal{C}}\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\mathcal{M} := \prod_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W} \mathbb{Z}^{e_{\mathcal{C}}}$:

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ \big(\mathbf{g} = (g_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W},\, \mathbf{m} = (\mathbf{m}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W}\big) & \mapsto & \mathbf{g}.\mathbf{m} := (g_{\mathcal{C}}.\mathbf{m}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W}. \end{array}$$

Fixons $\mathbf{g} = (g_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W} \in G$. Par abus de notation, on identifie $\mathbb{Z}/e_{\mathcal{C}}\mathbb{Z}$ avec ses représentants dans $\{0, 1, \ldots, e_{\mathcal{C}} - 1\} \subset \mathbb{Z}$. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et i tel que $1 \leq i \leq n_{\mathcal{C}}$, on pose

$$\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}} := \zeta_{e_{\mathcal{C}}}^{-g_{\mathcal{C}}} \mathbf{s}_i^{\mathcal{C}}.$$

Les éléments de

$$\tilde{\mathbf{S}}^{\mathcal{C}} := \bigcup_{\mathcal{C}\in\mathcal{A}/W} \bigcup_{1\leq i\leq n_{\mathcal{C}}} \{\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}}\}$$

engendrent $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$. De plus, pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et $i\,(1 \leq i \leq n_{\mathcal{C}})$, le générateur $\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}}$ vérifie

$$(\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}} - q^{m_{\mathcal{C},g_{\mathcal{C}}}})\,(\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}} - \zeta_{e_{\mathcal{C}}} q^{m_{\mathcal{C},g_{\mathcal{C}}+1}}) \cdots (\tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}} - \zeta_{e_{\mathcal{C}}}^{e_{\mathcal{C}}-1} q^{m_{\mathcal{C},g_{\mathcal{C}}+e_{\mathcal{C}}-1}}) = 0,$$

où les indices sont écrits modulo $e_{\mathcal{C}}$. On considère maintenant la spécialisation $\varphi_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ de $\mathcal{H}$. Par définition, elle est donnée par :

$$u_{\mathcal{C},j} \mapsto \zeta_{e_{\mathcal{C}}}^{j} q^{m_{\mathcal{C},j+g_{\mathcal{C}}}}.$$

On note $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ l'algèbre de Hecke cyclotomique correspondante. On peut supposer que $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ est engendrée par les éléments de $\tilde{\mathbf{S}}^{\mathcal{C}}$. Alors $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}} = \mathcal{H}_{\mathbf{m}}$. On a un isomorphisme $\Gamma^{\mathbf{g}} : \mathcal{H}_{\mathbf{m}} \to \mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ donné par :

$$\Gamma^{\mathbf{g}}(\mathbf{s}_i^{\mathcal{C}}) = \zeta_{e_{\mathcal{C}}}^{g_{\mathcal{C}}} \tilde{\mathbf{s}}_i^{\mathcal{C}}$$

pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et $i\,(1 \leq i \leq n_{\mathcal{C}})$. Celui-ci induit une action de G sur Λ : si $\mathbf{g} \in G$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, on note $\rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ la représentation irréductible de $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ associée. La représentation de $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ definie par composition $\rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{g}.\mathbf{m}} \circ \Gamma^{\mathbf{g}}$ est portée par le $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-module simple $V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\mu}}$. On pose

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}} := \boldsymbol{\mu}$$

et on a une action bien définie

$$\begin{array}{ccc} G \times \Lambda & \to & \Lambda \\ (\mathbf{g},\, \boldsymbol{\lambda}) & \mapsto & \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}}. \end{array}$$

Proposition 2.3.1 (Chlouveraki-Jacon [19])**.** *Soit $s_{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{m}}$ l'élément de Schur $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ associé à $\rho_{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{m}}$ et soit $s_{\boldsymbol{\lambda}}^{\varphi_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}}$ l'élément de Schur de $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$ associé à $\rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{g}.\mathbf{m}}$. On a $s_{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{m}} = s_{\boldsymbol{\lambda}}^{\varphi_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}}$ et en particulier, $a_{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{m}} = a_{\boldsymbol{\lambda}}^{\varphi_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}}$.*

Comme corollaire, en utilisant des propriétés de la matrice de décomposition, on obtient le résultat suivant concernant les ensembles basiques.

Corollaire 2.3.2 (Chlouveraki-Jacon [19]). *Supposons que $\mathcal{H}_{\boldsymbol{m}}$ admette un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta)$ associé à une spécialisation θ. Alors, pour tout $\mathbf{g} \in G$, l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{g}.\boldsymbol{m}}$ admet un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}(\theta)$ associé à θ et de plus*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{g}.\mathbf{m}}(\theta) = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{g}^{-1}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) \right\}$$

Afin d'obtenir une paramétrisation explicite des ensembles basiques, le corollaire cidessus montre qu'il suffit d'étudier certains cas. Par exemple, en type A, le corollaire précédent associé aux résultats de Dipper et James [20] permet de déterminer les ensembles basiques dans tous les cas :

Proposition 2.3.3 (Dipper-James [20], voir aussi [19]). *Soit W le groupe de Weyl de type A_{n-1}. On a $\mathcal{A}/W = \{\mathcal{C}\}$ et $e_{\mathcal{C}} = 2$. Soit $\boldsymbol{m} = (m_{\mathcal{C},0}, m_{\mathcal{C},1}) \in \mathbb{Z}^2$. Soit θ une spécialisation telle que $\theta(q)^{m_{\mathcal{C},0}-m_{\mathcal{C},1}}$ est une racine de l'unité d'ordre $e > 1$ dans un corps k.*

1. *Si $m_{\mathcal{C},0} > m_{\mathcal{C},1}$ alors $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ admet un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) \subset \Lambda$ par rapport à θ et on a*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \mathrm{Reg}_e(n)$$

où $\mathrm{Reg}_e(n)$ est l'ensemble des partitions e-regulières. Elles sont définies par :

$$\lambda \notin \mathrm{Reg}_e(n) \iff \exists i \in \mathbb{N},\ \lambda_i = \cdots = \lambda_{i+e-1} \neq 0.$$

2. *Si $m_{\mathcal{C},0} < m_{\mathcal{C},1}$ alors $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ admet un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) \subset \Lambda$ par rapport à θ et on a*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \mathrm{Res}_e(n)$$

où $\mathrm{Res}_e(n)$ est l'ensemble des partitions e-restreintes. Elles sont définies par :

$$\lambda \in \mathrm{Res}_e(n) \iff \forall i \in \mathbb{N},\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq e-1.$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux ensembles basiques associés à d'autres groupes de réflexions. La prochaine étape consiste à étudier le type B ou plus généralement la série $G(l,1,n)$. Pour ceci, le théorème d'Ariki va nous permettre de traduire nos problèmes de théorie des représentations d'algèbres de Hecke en terme de représentations d'algèbre quantique en type A affine. Le prochain chapitre est donc consacré à cette approche.

Chapitre 3

Bases canoniques et cristaux en type A affine

Soit W un groupe de réflexions complexes de la série $G(l,1,n)$. Afin de déterminer les ensembles basiques ou même les matrices de décomposition associées à tout type de spécialisation, on peut s'aider de la théorie d'Ariki-Lascoux-Leclerc-Thibon qui établit des liens fondamentaux entre les objets ci-dessus et des objets remarquables issus de la théorie des groupes quantiques : les bases canoniques de Kashiwara-Lusztig.

Dans ce chapitre, nous gardons les notations du chapitre précédent. On se donne donc une algèbre de Hecke cyclotomique $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ associée à W. On pose $K=\mathbb{Q}(\eta_l)$, y est une indéterminée et $q=y^l$. On a $\mathcal{A}/W=\{\mathcal{C},\mathcal{C}'\}$ avec $e_{\mathcal{C}}=l$ et $e_{\mathcal{C}'}=2$. $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ est donc une $\mathbb{Z}_K[y,y^{-1}]$-algèbre associative unitaire avec générateurs que l'on note pour simplifier $\mathbf{s},\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\dots,\mathbf{t}_{n-1}$ et avec des relations

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1=\mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s},\\
&\mathbf{s}\mathbf{t}_j=\mathbf{t}_j\mathbf{s} \text{ pour } j=2,\dots n,\\
&\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j=\mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}, \mathbf{t}_i\mathbf{t}_j=\mathbf{t}_j\mathbf{t}_i \text{ pour } |i-j|>1,\\
&(\mathbf{s}-q^{m_{\mathcal{C},0}})(\mathbf{s}-\zeta_l q^{m_{\mathcal{C},1}})\dots(\mathbf{s}-\zeta_l^{l-1}q^{m_{\mathcal{C},l-1}})=0,\\
&(\mathbf{t}_j-q^{m_{\mathcal{C}',0}})(\mathbf{t}_j+q^{m_{\mathcal{C}',1}})=0 \text{ pour } j=1,\dots n.
\end{aligned}
$$

On considère une spécialisation θ dans un corps k. On désire étudier l'algèbre spécialisée $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$, en particulier déterminer les nombres de décomposition (et prouver éventuellement l'existence d'ensembles basiques.) Pour résoudre ce problème, un résultat de Dipper-Mathas [23] permet de réduire le problème, via une équivalence de Morita, au cas où $\theta(q)$ est une racine primitive de l'unité $\eta_e:=\exp(2i\pi/e)$ d'ordre $e>1$ et où :

$$m_{\mathcal{C}',0}=1,\ m_{\mathcal{C}',1}=0$$

et pour tout $j=0,\dots,l-1$,

$$m_{\mathcal{C},j}=v_j-je/l$$

où $(v_0,\dots,v_{l-1})$ est un l-uplet d'entiers vérifiant $0\leq v_0\leq v_1\leq\dots\leq v_{l-1}<e$. Remarquons que dans ce cas, l'algèbre spécialisée a des relations du type

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{s}-\eta_e^{v_0})(\mathbf{s}-\eta_e^{v_1})\dots(\mathbf{s}-\eta_e^{v_{l-1}})=0,\\
&(\mathbf{t}_j-\eta_e)(\mathbf{t}_j+1)=0 \text{ pour } j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

où l'on a gardé les mêmes notations pour les générateurs. Dans ce cas, et si k est de caractéristique nulle, un théorème d'Ariki (preuve d'une généralisation de la conjecture de Lascoux-Leclerc-Thibon) permet de traduire ce problème en un problème de théorie des représentations dans le groupe quantique de type A affine. Dans ce chapitre, nous donnons les liens entre certains objets provenant de ces deux théories. Nous étudions ensuite ceux issus de la théorie des groupes quantiques, à savoir les bases canoniques et les cristaux, toujours en type A affine. Les principales conséquences sur les algèbres de Hecke seront étudiées dans le chapitre suivant.

3.1 Le théorème d'Ariki

Dans cette introduction, on donne un (très) rapide survol des liens unissant la théorie des représentations d'algèbres d'Ariki-Koike et celle des groupes quantiques en type A affine induits par la conjecture de Lascoux-Leclerc-Thibon et par le théorème d'Ariki. Pour une étude plus détaillée de ces connexions, on se réfère à [4, 36, 73].

Soit $\mathfrak{h}$ un $\mathbb{Z}$-module libre avec base $\{h_i \mid 0 \leq i < e\} \cup \{d\}$ et soit $\{\Lambda_i \mid 0 \leq i < e\} \cup \{\delta\}$ une base duale pour la forme :

$$< \, , \, >: \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{Z}$$

telle que $< \Lambda_i, h_j >= \delta_{ij}$, $< \delta, d >= 1$ et $< \Lambda_i, d >=< \delta, h_j >= 0$ pour $0 \leq i, j < e$. Pour $0 \leq i < e$, on définit les racines simples α_i de $\mathfrak{h}^*$ par :

$$\alpha_i = \begin{cases} 2\Lambda_0 - \Lambda_{e-1} - \Lambda_1 + \delta & \text{si } i = 0, \\ 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1} & \text{si } i > 0, \end{cases}$$

où $\Lambda_e := \Lambda_0$. Les Λ_i (avec $i = 0, \ldots, e-1$) sont appelés les poids fondamentaux. Soit v une indéterminée et soit $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ le groupe quantique en type A affine. C'est une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{C}(v)$ avec générateurs e_i, f_j et k_h (où $0 \leq i, j < e$ et $h \in \mathfrak{h}$) soumise entre autre aux relations de Serre quantifiées (voir par exemple [4]). On s'intéresse ici à la classe des modules irréductibles de plus haut poids de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$. Il est possible d'obtenir une réalisation de ces modules irréductibles grâce aux espaces de Fock. Soit $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$ et soit $\mathcal{F}^{\mathbf{v}}$ le $\mathbb{C}(v)$-espace vectoriel engendré par les symboles $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}\rangle$. où $\boldsymbol{\lambda}$ parcourt l'ensemble $\Pi^l(n)$ des l-partitions (c'est-à-dire les l-uplets de partitions) de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le l-uplet $\mathbf{v}$ est appelé la multicharge. Il est possible de définir une action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ sur cet espace appelé espace de Fock en suivant les résultats de Jimbo, Misra, Miwa et Okado [63], Hayashi [47] et Uglov [81]. Cette action dépend fortement du choix de $\mathbf{v}$ et induit une structure de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-module sur $\mathcal{F}^{\mathbf{v}}$ notée $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$. Si on considère ensuite le sous-module $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ de $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$ engendré par la l-partition vide, on obtient le module irréductible de plus haut poids $\Lambda_{v_0 (\text{mod } e)} + \ldots + \Lambda_{v_{l-1} (\text{mod } e)}$. Notons en particulier que si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont tels que $\Lambda_{v_0 (\text{mod } e)} + \ldots + \Lambda_{v_{l-1} (\text{mod } e)} = \Lambda_{v'_0 (\text{mod } e)} + \ldots + \Lambda_{v'_{l-1} (\text{mod } e)}$, les actions associées sont réellements différentes même si les modules $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ et $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}'}$ sont isomorphes. Cela aura une importance capitale pour la suite.[1].

On peut associer à l'espace de Fock $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$ un certain graphe construit combinatoirement : le cristal de $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$. Les sommets de ce graphe sont donnés par l'ensemble de toutes les multipartitions $\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi^l(n)$ et les flèches entre ces sommets sont construites en considérant l'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ sur $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$ (voir [81] ou [57, §3.2]). En ne gardant que la composante connexe contenant la l-partition vide, on obtient le cristal de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ qui ne contient qu'un sous-ensemble de l'ensemble des l-partitions $\Phi_e^{\mathbf{v}}$ appelé ensemble des l-partitions de Uglov. Cet ensemble dépend fortement du choix de $\mathbf{v}$. En effet, même dans le cas où $\Lambda_{v_0 (\text{mod } e)} + \ldots + \Lambda_{v_{l-1} (\text{mod } e)} = \Lambda_{v'_0 (\text{mod } e)} + \ldots + \Lambda_{v'_{l-1} (\text{mod } e)}$ c'est-à-dire si $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}} \simeq \mathcal{M}_e^{\mathbf{v}'}$, les ensembles $\Phi_e^{\mathbf{v}}$ et $\Phi_e^{\mathbf{v}'}$ sont différents en général.

[1]On peut remarquer que tous ces résultats restent vrais si on considère le groupe quantique $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$ en remplaçant e par $+\infty$.

Maintenant, par la théorie de Kashiwara-Lusztig, le $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ admet une base remarquable, la base canonique [64, 69]. Celle-ci s'indexe naturellement par l'ensemble des l-partitions de Uglov $\Phi_e^{\mathbf{v}}$ dont la définition récursive et combinatoire peut être trouvée dans [57, Déf. 3.2] :

$$\{G(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}}\}.$$

Notons $\Phi_e^{\mathbf{v}}(n) = \Phi_e^{\mathbf{v}} \cap \Pi^l(n)$. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}}(n)$, on a :

$$G(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \Pi^l(n)} d_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}(v) |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}\rangle.$$

Le théorème suivant, prouvé par Ariki en généralisant une conjecture de Lascoux-Leclerc-Thibon, est un résultat fondamental de ce mémoire :

Théorème d'Ariki. *On garde les notations de l'introduction et on considère la matrice de décomposition associée à la spécialisation considérée ici (rappelons que la caractéristique de k est supposée nulle). Il existe une bijection*

$$\Psi_e^{\mathbf{v}} : \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}) \to \Phi_e^{\mathbf{v}}(n)$$

telle que pour tout $M \in \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})$, on a

$$[V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}} : M] = d_{\boldsymbol{\lambda}, \Psi_e^{\mathbf{v}}(M)}(1).$$

Ainsi la matrice de décomposition est exactement l'évaluation en $v = 1$ de la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$.

Ainsi un algorithme de calcul pour les bases canoniques donne aussi un algorithme de calcul pour les matrices de décomposition. En type A (c'est-à-dire si $l = 1$) en particulier, l'article fondateur de Lascoux-Leclerc-Thibon [66] présente un tel algorithme. Dans la prochaine section, on obtient une généralisation de celui-ci pour tout $d \in \mathbb{N}$. On obtient ainsi un algorithme de calcul pour les nombres de décomposition d'algèbres d'Ariki-Koike en caractéristique nulle.

3.2 Un algorithme pour le calcul des bases canoniques

Dans cette section, nous donnons une généralisation de l'algorithme de LLT. Celle-ci s'obtient en utilisant certaines idées provenant de la théorie des ensembles basiques. Un corollaire immédiat sera d'ailleurs la preuve d'existence d'ensembles basiques pour les algèbres d'Ariki-Koike. Nous décrivons ici les résultats de [56] et [53]. Nous prenons de plus le point de vue développé dans [62].

La première étape consiste à choisir une réalisation suffisamment agréable du module irréductible de plus haut poids dont on veut trouver la base canonique. D'après la section précédente, il existe en effet plusieurs choix possibles en utilisant l'espace de Fock. Considérons le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_l$. Ce groupe est engendré par des éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{l-1}$ et $y_1, \ldots, y_l$ avec les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & \text{avec } i = 1, ..., l-2 \\
\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{avec } i, j = 1, \ldots l-1 \text{ et } |i-j| > 1 \\
\sigma_i^2 = 1 & \text{avec } i = 1, ..., l-1 \\
y_i y_j = y_j y_i, & \text{avec } i, j = 1, ..., l \\
\sigma_i y_j = y_j \sigma_i & \text{avec } i = 1, ..., l-1,\ j = 1, ..., l,\ j \neq i, i+1, \\
\sigma_i y_i \sigma_i = y_{i+1} & \text{avec } i = 1, \ldots l-2.
\end{array}$$

Si on pose $\tau = y_l \sigma_{l-1} \cdots \sigma_1$, on voit que $\widehat{\mathfrak{S}}_l$ est engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$ et τ. On a une action naturelle de $\widehat{\mathfrak{S}}_l$ sur $\mathbb{Z}^l$ définie comme suit. Soit $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. Alors, on a :

$$\sigma_i(\mathbf{u}) := (u_0, \dots, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{l-1}) \text{ et } y_i(\mathbf{u}) := (u_0, \dots, u_{i-2}, u_{i-1} + e, \dots, u_{l-1}).$$

Alors on a $\tau(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_0 + e)$. Un domaine fondamental pour cette action est :

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{l-1}) \mid 0 \le u_0 \le u_1 \le \dots \le u_{l-1} < e\}.$$

Soit $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. On désire obtenir la base canonique du module simple de plus haut poids $\Lambda_{v_0 (\text{mod } e)} + \dots + \Lambda_{v_{l-1} (\text{mod } e)}$. Par les résultats d'Uglov, tout élément $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^l$ dans l'orbite de $\mathbf{v}$ sous l'action de $\widehat{\mathfrak{S}}_l$ paramètre une action du groupe quantique sur l'espace de Fock $\mathcal{F}_e^{\mathbf{u}}$ (voir par exemple [60, §2.1]). De plus, le module irréductible de plus haut poids engendré par $|\emptyset, \mathbf{u}\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$. Il se trouve que si $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^l$ est dans le domaine fondamental $\mathcal{D}$, l'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ associée possède une particularité qui se révèle très utile. En effet, l'ensemble des multipartitions de Uglov $\Phi_e^{\mathbf{u}}$, multipartitions qui indexent les éléments de la base canonique a une description particulièrement simple dans ce cas particulier. Par des résultats de Jimbo-Misra-Miwa-Okado [63] et Foda-Leclerc-Okado-Thibon-Welsh [26], on a en effet le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. *Supposons que* $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. *Alors on a* $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{u}}$ *si et seulement si*

1. *pour tout* $0 \le j \le l-2$ *et* $i = 1, 2, \dots$, *on a :*

$$\begin{aligned} &\lambda_i^j \ge \lambda_{i+u_{j+1}-u_j}^{j+1} \\ \textit{et} \quad &\lambda_i^{l-1} \ge \lambda_{i+e+u_0-u_{l-1}}^0; \end{aligned}$$

2. *pour tout* $k > 0$, *l'ensemble des résidus associés aux boîtes de la forme* (a, k, c) *avec* $\lambda_a^c = k$ *est strictement inclus dans* $\{0, 1, \dots, e-1\}$ *(voir [53, §2.2] pour la définition du résidu).*

On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ *est une* l*-partition FLOTW.*

En utilisant ce résultat, il est possible de trouver une première approximation de la base canonique de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{u}}$ lorsque $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. Cette base est en fait une base monomiale sur les opérateurs de Chevalley f_i. On voit apparaître un lien avec la théorie des algèbres de Hecke avec l'apparition de la a-fonction qui constitue une "bonne" façon d'ordonner les l-partitions, générateurs de l'espace de Fock. En gardant les notations de l'introduction, cette a-fonction $a^{\mathbf{m}}$ est ici définie en fonction d'un ensemble de paramètres $\mathbf{m}$ vérifiant :

$$m_{\mathcal{C}',0} = 1, \; m_{\mathcal{C}',1} = 0$$

et pour tout $j = 0, \dots, l-1$,

$$m_{\mathcal{C},j} = u_j - je/l.$$

On peut utiliser les résultats de [15, 34] pour avoir une description explicite de la a-valeur. On obtient alors la proposition suivante, prouvée de manière purement combinatoire.

Proposition 3.2.2 (Jacon [53])**.** *Supposons que* $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. *Alors pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{u}}$, *il existe une suite*

$$\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{\alpha_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{\alpha_s}$$

telle que

$$f_{i_1}^{(\alpha_1)} f_{i_2}^{(\alpha_2)} \dots f_{i_s}^{(\alpha_s)} |\emptyset, \mathbf{u}\rangle = |\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}\rangle + \textit{Combinaison linéaire de } |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}\rangle \textit{ avec } a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\mu}) > a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Cette proposition peut être vue comme une généralisation d'un résultat de Lascoux-Leclerc-Thibon en niveau 1 où l'ordre de dominance est ici remplacé par l'ordre induit par la a-fonction. En utilisant la caractérisation de la base canonique, on obtient le théorème suivant qui montre la triangularité de la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{u}}$ si on ordonne les l-partitions en respectant leurs a-valeurs.

Théorème 3.2.3 (Jacon [53]). *Supposons que* $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. *Alors pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{u}}$, *on a*

$$G(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = |\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}\rangle + \textit{Combinaison linéaire de } |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}\rangle \textit{ avec } a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\mu}) > a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Plus précisément, on peut obtenir un algorithme pour le calcul de cette base canonique en utilisant la proposition ci-dessus et en mimant celui décrit par Lascoux-Leclerc-Thibon.

Corollaire 3.2.4 (Jacon [56]). *Supposons que* $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. *Alors on dispose d'un algorithme pour le calcul de la base canonique de* $\mathcal{M}_e^{\mathbf{u}}$. *Par conséquent, par le théorème d'Ariki, on a un algorithme pour le calcul de la matrice de décomposition de toute algèbre d'Ariki-Koike en caractéristique* 0.

L'algorithme ci-dessus a été implémenté dans GAP [52]. Nous notons qu'un autre algorithme a été plus récemment proposé par Fayers [25] et qu'il est également possible d'utiliser ceux d'Yvonne [84] et d'Uglov [81] pour calculer ces matrices même si ceux-ci sont a priori plus lents (ceci venant du fait qu'ils calculent les matrices de bases canoniques pour l'espace de Fock). Comme nous l'avons vu, la clef du résultat ci-dessus est la caractérisation des multipartitions de Uglov dans le cas particulier où $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{l-1}) \in \mathcal{D}$. Dans le cas général $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$, on ne dispose que d'une caractérisation récursive de ces l-partitions, difficile à mettre en oeuvre en pratique. Le problème étudié dans la prochaine section est celui de déterminer de manière simple (en particulier non récursive) les multipartitions d'Uglov dans un cadre complètement général.

3.3 Isomorphismes de Cristaux

Cette section expose essentiellement les résultats de [58] et leurs généralisations dans [62]. Nous gardons les notations de la section précédente. On étudie ici les cristaux associés aux représentations irréductibles de plus haut poids de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ (voir [64] pour un exposé général de la théorie des bases cristallines). Nous voulons ici déterminer explicitement les multipartitions de Uglov $\Phi_e^{\mathbf{v}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$. L'idée principale peut se résumer comme suit :

- On connaît une caractérisation explicite de $\Phi_e^{\mathbf{u}}$ lorsque $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$.
- Si $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$, il existe $w \in \widehat{\mathfrak{S}}_l$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ tel que $\mathbf{v} = w.\mathbf{u}$.
- Les modules $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ et $\mathcal{M}_e^{\mathbf{u}}$ sont donc isomorphes.
- Les cristaux de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ et $\mathcal{M}_e^{\mathbf{u}}$ sont donc isomorphes.
- Il existe donc une bijection (de cristal) $\Psi_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}}^e$ entre $\Phi_e^{\mathbf{v}}$ et $\Phi_e^{\mathbf{u}}$.

Ainsi, pour obtenir une caractérisation de toutes les l-partitions de Uglov, il suffit d'obtenir une description explicite des bijections ci-dessus. Si on considère l'action ci-dessus, il suffit en fait de décrire, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$, les bijections

$$\Psi_{\mathbf{v}\to\sigma_i.\mathbf{v}}^e : \Phi_e^{\mathbf{v}} \to \Phi_e^{\sigma_i.\mathbf{v}}$$

pour tout $i = 1, \ldots l-1$ et

$$\Psi_{\mathbf{v}\to\tau.\mathbf{v}}^e : \Phi_e^{\mathbf{v}} \to \Phi_e^{\tau.\mathbf{v}}.$$

Cette dernière bijection est très facile à déterminer. L'étude des actions du groupe quantique sur l'espace de Fock nous donne en effet la proposition suivante.

Proposition 3.3.1 (Jacon-Lecouvey [62]). *Soit* $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$ *et soit* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^0, \ldots, \lambda^{l-1})$ *alors on a*

$$\Psi_e^{\mathbf{v} \to \tau.\mathbf{v}}(\lambda^0, \ldots, \lambda^{l-1}) = (\lambda^{l-1}, \lambda^0, \ldots, \lambda^{l-2})$$

La description des bijections $\Psi_e^{\mathbf{v} \to \sigma_i . \mathbf{v}}$ ($i = 1, \ldots, l-1$) est a priori beaucoup plus délicate à obtenir. La principale difficulté réside dans le fait que l'action du groupe quantique est relativement difficile à étudier. Cependant, on peut contourner ce problème en montrant que les bijections qu'on désire décrire ne dépendent pas de e. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 (Jacon-Lecouvey [62]). *Pour tout* $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$*, le cristal du* $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$*-module* $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ *se plonge dans le cristal du* $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$*-module irréductible* $\mathcal{M}_\infty^{\mathbf{v}}$*. De plus, pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}}$ *et pour tout* $i = 1, \ldots, l-1$ *on a*

$$\Psi_e^{\mathbf{v} \to \sigma_i . \mathbf{v}}(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi_\infty^{\mathbf{v} \to \sigma_i . \mathbf{v}}(\boldsymbol{\lambda})$$

Tout le problème se résume donc à déterminer les bijections $\Psi_\infty^{\mathbf{v} \to \sigma_i . \mathbf{v}}$ ($i = 0, \ldots, l-1$). Or, l'action de $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$ sur l'espace de Fock est beaucoup plus aisée à comprendre que celle de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$. Une étude combinatoire permet d'obtienir grâce aux travaux de [58] et [62], une description explicite de ces bijections (voir [62, §5.2] pour la procédure). Ceci s'inspire des travaux de Leclerc-Miyachi [68] et de Nakayashiki-Yamada [78] sur les bases canoniques des $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules.

Proposition 3.3.3 (Jacon [58], Jacon-Lecouvey [62]). *Pour* $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$*, la procédure (non récursive) décrite dans [62, Prop. 5.2.2] fournit une description explicite des bijections* $\Psi_\infty^{\mathbf{v} \to \sigma_i . \mathbf{v}}$ *pour* $i = 1, \ldots, l-1$.

Ainsi, ces trois derniers résultats nous fournissent une procédure pour déterminer toutes les multipartitions de Uglov. Remarquons que si la multicharge est très dominante, c'est-à-dire si $s_i - s_{i-1} > n - 1$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, l-2$ alors ces multipartitions sont les multipartitions Kleshchev (voir [4]). Ce type de l-partitions est intimement relié aux représentations d'algèbres de Ariki-Koike au sens où elles paramètrent naturellement ces modules simples par des résultats d'Ariki-Mathas [9].

Le résultat fondamental permettant d'obtenir ces descriptions de l-partitions est le théorème 3.3.2, affirmant que les isomorphismes de cristaux des $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-modules de plus haut poids sont contrôlés par les isomorphismes de cristaux des $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules de plus haut poids. Il est alors naturel de se demander si un phénomène similaire s'observe pour les bases canoniques : y a t-il un lien entre les bases canoniques des $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-modules irréductibles de plus haut poids et celles des $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules irréductibles de plus haut poids ?

3.4 Factorisation des bases canoniques

On suit ici [8]. Une motivation pour étudier le principal problème de cette partie réside dans le résultat suivant concernant la théorie des représentations d'algèbres d'Ariki-Koike. Le point de départ concerne toujours le problème de la détermination des matrices de décomposition pour les algèbres d'Ariki-Koike.

Soit $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. Considérons la matrice de décomposition associée à la spécialisation θ comme dans le théorème d'Ariki et l'introduction du chapitre 3 :

$$D_e^{\mathbf{v}} = ([V_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\lambda}} : M])_{\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^l(n), M \in \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}_{\mathbf{m}})}$$

Notons que l'algèbre d'Ariki-Koike $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ est engendrée par $\mathbf{s}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ et avec des relations

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s},\ \mathbf{s}\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_j\mathbf{s} \text{ pour } j \neq 1 \\
&\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}, \mathbf{t}_i\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_j\mathbf{t}_i \text{ pour } |i-j| > 1 \\
&(\mathbf{t}_j - \eta_e)(\mathbf{t}_j + 1) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1 \\
&(\mathbf{s} - \eta_e^{s_0})(\mathbf{s} - \eta_e^{s_1}) \ldots (\mathbf{s} - \eta_e^{s_{l-1}}) = 0.
\end{aligned}$$

où $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{e})$. Considérons l'algèbre d'Ariki-Koike $K(q)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$ sur $K(q)$ engendrée par $\mathbf{s}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ et avec des relations

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1\mathbf{s}\mathbf{t}_1\mathbf{s},\ \mathbf{s}\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_j\mathbf{s} \text{ pour } j \neq 1 \\
&\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_{j+1}\mathbf{t}_j\mathbf{t}_{j+1}, \mathbf{t}_i\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_j\mathbf{t}_i \text{ pour } |i-j| > 1 \\
&(\mathbf{t}_j - q)(\mathbf{t}_j + 1) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1 \\
&(\mathbf{s} - q^{s_0})(\mathbf{s} - q^{s_1}) \ldots (\mathbf{s} - q^{s_{l-1}}) = 0
\end{aligned}$$

Cette algèbre n'est pas semi-simple en général, on a donc une matrice de décomposition associée que l'on note $D_\infty^{\mathbf{v}}$. Le théorème suivant montre que la matrice $D_e^{\mathbf{v}}$ se factorise en la matrice $D_\infty^{\mathbf{v}}$.

Théorème 3.4.1 (Geck-Rouquier [40])**.** *Il existe une matrice dite matrice d'ajustement $D_{e,\infty}^{\mathbf{v}}$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$D_e^{\mathbf{v}} = D_\infty^{\mathbf{v}}.D_{e,\infty}^{\mathbf{v}}$$

On sait par le théorème d'Ariki que la matrice $D_e^{\mathbf{v}}$ a une quantification naturelle, c'est en effet la spécialisation en $v = 1$ de la matrice $D_e^{\mathbf{v}}(v)$ de la base canonique du $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$. La matrice $D_\infty^{\mathbf{v}}$ peut aussi être vue comme la spécialisation de la base canonique d'un module $\mathcal{M}_\infty^{\mathbf{v}}$ qui est le $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_\infty)$-module irréductible de plus haut poids $\Lambda_{v_0} + \ldots + \Lambda_{v_{l-1}}$. Il est alors naturel de se demander si la matrice $D_e^{\mathbf{v}}(v)$ se factorise également par une certaine matrice $D_\infty^{\mathbf{v}}(v)$.

De façon plus générale, on a vu que les modules irréductibles de plus haut poids se réalisent comme sous-modules de l'espace de Fock. Par les résultats de Uglov, les espaces de Fock admettent aussi des bases canoniques. En fait, les matrices $D_e^{\mathbf{v}}(v)$ et $D_\infty^{\mathbf{v}}(v)$ sont des sous-matrices des matrices de bases canoniques $\Delta_e^{\mathbf{v}}(v)$ et $\Delta_\infty^{\mathbf{v}}(v)$ d'espaces de Fock. La question de factorisation ci-dessus se pose aussi alors pour ces matrices. Ce problème de factorisation est résolu par le théorème suivant.

Théorème 3.4.2 (Ariki-Jacon-Lecouvey [8])**.** *Soient $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$ et $e \in \mathbb{N}$. Il existe des matrices $\Delta_{e,\infty}^{\mathbf{v}}(v)$ et $D_{e,\infty}^{\mathbf{v}}(v)$ à coefficients dans $\mathbb{N}[v, v^{-1}]$ telles que*

$$\Delta_e^{\mathbf{v}}(v) = \Delta_\infty^{\mathbf{v}}(v).\Delta_{e,\infty}^{\mathbf{v}}(v) \qquad \textit{et} \qquad D_e^{\mathbf{v}}(v) = D_\infty^{\mathbf{v}}(v).D_{e,\infty}^{\mathbf{v}}(v)$$

Le fait que les "v-matrices de décomposition" se factorisent provient d'une combinaison de résultats de Jimbo, Misra, Miwa et Okado ([63]) qui induisent une "compatibilité" entre les actions de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ et de $\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)$ sur l'espace de Fock et des résultats de Uglov [81] raffinés dans [36] sur la forme des éléments de la base canonique de l'espace de Fock. Quant au résultat de positivité, nous prouvons que les coefficients de la matrice $\Delta_\infty^{\mathbf{v}}(v)$ peuvent s'exprimer comme somme de produits de constantes de structures pour l'algèbre de Hecke affine de type A. Le théorème suit alors de résultats de Grojnowski et Haiman [45].

Ce théorème peut être à la fois vu comme une version quantique du théorème 3.4.1 et comme un analogue du théorème 3.3.2 pour les bases canoniques de Kashiwara-Lusztig. Un algorithme de calcul de la v-matrice d'ajustement $D_{e,\infty}^{\mathbf{v}}(v)$ est proposé dans [8]. Notons également les trois faits suivants :

- La matrice $D^{\mathbf{v}}_\infty(v)$ de la base canonique des $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules irréductibles de plus haut poids a une forme extrêmement simple. On dispose même de formules "fermées" pour celle-ci grâce aux travaux de Leclerc et Miyachi [68] en niveau 2.
- Dans le cas "très dominant", la matrice $D^{\mathbf{v}}_\infty(v)$ est égale à l'identité et la matrice d'ajustement est égale à la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}^{\mathbf{v}}_e$. Ceci est également vrai dans le cas où $l = 1$.
- Certains résultats récents de Brundan, Kleshchev et Wang [16, 17] suggèrent que les matrices $D^{\mathbf{v}}_e(v)$ pourraient s'interpréter comme matrices de décomposition de modules de Specht gradués. En type A_{n-1} (c'est-à-dire dans le cas du niveau 1) et en type B_n (c'est-à-dire dans le cas du niveau 2), les conjectures [66, §9] et [14, Conj. C] proposent une interprétation des matrices en termes de représentations d'algèbres de Hecke (via les filtrations de Jantzen).

Chapitre 4

Ensembles basiques pour les algèbres de Hecke (2)

Nous retournons dans ce chapitre au problème qui nous avait intéressé au tout début de ce mémoire : déterminer explicitement les ensembles basiques pour les algèbres de Hecke, c'est-à-dire trouver un moyen simple d'indexer les modules simples de ces algèbres. Pour le type A, la proposition 2.3.3 permet de conclure, tandis que pour les types exceptionnels, l'étude des tables de matrices de décomposition données par Geck, Lux et Müller suffit à déterminer ces ensembles basiques (voir [51] pour une étude des matrices de décomposition explicites calculées dans [28, 29, 37, 75, 76]).

Il reste donc à considérer les cas des types B_n et D_n. Pour ce dernier type, nous verrons qu'il peut se déduire du type B_n pour un certain choix de paramètres en utilisant la théorie de Clifford, grâce à un résultat de M. Geck [31]. Le principal problème se réduit donc à trouver ces ensemble basiques pour le type B_n. Or les algèbres de Hecke de type B_n sont des cas particuliers d'algèbres d'Ariki-Koike. On peut donc utiliser le théorème d'Ariki pour étudier les matrices de décomposition. Il est en fait possible de conclure en utilisant certains résultats d'Uglov sur les bases canoniques d'espaces de Fock [81]. Ces derniers résultats étant valables pour tout niveau, on peut ainsi obtenir une généralisation aux cas des groupes de réflexions complexes de type $G(l,1,n)$. De même, en se servant de la théorie de Clifford, on aboutit à la preuve d'existence d'ensemble basiques pour les algèbres de Hecke de type $G(l,p,n)$.

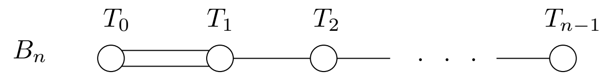
Dans la troisième partie, nous étudions une question soulevée par l'existence de multiples ensembles basiques en type B_n. Les différents choix de paramètres possibles pour ce type induisent en effet plusieurs possibilités pour indexer le même ensemble de modules simples. On se retrouve ainsi avec plusieurs ensembles basiques qui sont en bijections les uns avec les autres. Un problème naturel consiste à étudier ces bijections. C'est le but de cette partie où nous montrons en particulier que ces bijections sont contrôlées par certaines représentations remarquables des groupes de Weyl de type B : les représentations constructibles. Enfin, dans la dernière partie du chapitre, nous étudions les liens, parfois conjecturaux, entre les questions posées ici et la théorie de Kazhdan-Lusztig.

4.1 Le cas des groupes de Weyl

Comme noté dans l'introduction de cette section, il nous reste à obtenir les ensembles basiques pour les types B_n et D_n. Commençons par le type B_n. Nous suivons ici essentiellement [35] puis [54]. On se donne l'algèbre de Hecke de type B_n comme dans le premier chapitre. Gardons les notations du premier chapitre et fixons $(m_{\mathcal{C}_1,0}, m_{\mathcal{C}_1,1}) \in \mathbb{Z}^2$

et $(m_{\mathcal{C}_2,0}, m_{\mathcal{C}_2,1}) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\mathcal{A}/W = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$. On prend ici $K = \mathbb{Q}$. Soit y une indéterminée et on pose $q = y^2$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ de type B_n est la $\mathbb{Z}[y, y^{-1}]$ algèbre avec :

– générateurs : $T_0, \ldots, T_{n-1}$
– relations : relations de tresses symbolisées par le diagramme suivant :



et les retations quadratiques

$$(T_0 - q^{m_{\mathcal{C}_1,0}})(T_0 + q^{m_{\mathcal{C}_1,1}}) = (T_i - q^{m_{\mathcal{C}_2,0}})(T_i + q^{m_{\mathcal{C}_2,1}}) = 0,\ i = 1, \ldots, n-1$$

Un groupe de Weyl de type B_n est aussi un groupe de réflexions complexes de type $G(2,1,n)$. L'ensemble Λ indexant les modules simples de l'algèbre de groupe (et donc les modules simples de l'algèbre de Hecke dans le cas semi-simple déployé) est l'ensemble des bipartitions de n :

$$\Lambda = \Pi^l(n) = \big\{(\lambda^0, \lambda^1)|\ \lambda^0 \in \Pi^1(s),\ \lambda \in \Pi^1(n-s),\ s \in [0,n]\big\}$$

On se donne ici une spécialisation dans un corps k tel que $\theta(q) = \xi \in k^\times$. D'après la Prop. 2.2.3, on peut supposer que k est de caractéristique 0. On désire ensuite obtenir explicitement les ensembles basiques associés. Le théorème 2.3.2 permet tout d'abord de se placer dans le cas où la spécialisation cyclotomique $\varphi_{\mathbf{m}}$ est telle que $a := m_{\mathcal{C}_2,0} - m_{\mathcal{C}_2,1} \in \mathbb{N}_{>0}$ et $b := m_{\mathcal{C}_1,0} - m_{\mathcal{C}_1,1} \in \mathbb{N}$. Les autres cas s'obtiennent en appliquant [59, Prop. 2.5].

Une nouvelle réduction de cas permet de nous placer dans la situation suivante (les autres cas (A) et (B) de [35, Thm 1.1] sont réglés facilement dans le paragraphe §2 de [35] en utilisant des résultats de Dipper, James et Murphy [22]). On suppose que $\theta(q) = \eta_f$ est une racine primitive de l'unité d'ordre f et que de plus

– $\eta_f^a \neq 1$ est une racine primitive de l'unité d'ordre $e > 1$,
– Il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\eta_f^b = -\eta_f^{ad}$.

Alors, on obtient une matrice de décomposition, qui, par le théorème d'Ariki, correspond à la matrice de la base canonique pour le $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module irréductible de plus haut poids $\Lambda_0 + \Lambda_d$. Connaissant une formule explicite pour la a-fonction, l'étude de cette matrice suffit à nous fournir une description de l'ensemble basique. Cependant, dans le cadre général, il est assez difficile d'obtenir des informations sur la base canonique de manière directe. L'idée est ici de considérer la base canonique de l'espace de Fock définie par Uglov [81].

On sait que $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ est un sous-module de l'espace de Fock $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$. On peut définir une involution sur $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$ qui prolonge celle $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$. Une base canonique peut alors se définir pour cet espace. Celle-ci est compatible avec la base canonique de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ dans le sens où les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$ sont des éléments de la base canonique de $\mathcal{F}_e^{\mathbf{v}}$. On peut étudier l'involution d'Uglov de l'espace de Fock et montrer que la matrice de cette involution est triangulaire vis-à-vis de la a-valeur. Ceci induit la triangularité de la matrice de la base canonique de l'espace de Fock et donc de $\mathcal{M}_e^{\mathbf{v}}$. On obtient alors les deux résultats suivants :

– Lorsque le théorème d'Ariki est vérifié, c'est-à-dire en caractéristique 0, il est inutile de supposer la véracité des conjectures de Lusztig pour prouver l'existence d'ensembles basiques : les résultats de triangularité de la base canonique suffisent.
– Dans ce cas, les ensembles basiques sont donnés par les bipartitions indexant le cristal du module irréductible, c'est-à-dire les bipartitions d'Uglov. Nous résumons ceci dans le théorème suivant.

Théorème 4.1.1 (Geck-Jacon [35])**.** *Soit W le groupe de Weyl de type B_n. On se place sous les hypothèses ci-dessus. Rappellons que $b := m_{\mathcal{C}_1,0} - m_{\mathcal{C}_1,1} \in \mathbb{N}$ et $a :=$*

$m_{\mathcal{C}_2,0} - m_{\mathcal{C}_2,1} \in \mathbb{N}_{>0}$. *On peut donc supposer qu'il existe* $p_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$d + p_0 e < b/a < d + (p_0+1)e.$$

On a

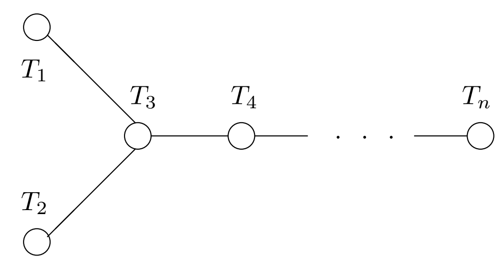
$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \Phi_e^{(d+p_0 e,0)},$$

où $\Phi_e^{(d+p_0 e,0)}$ *désigne l'ensemble des bipartitions d'Uglov.*

Considérons maintenant le cas du type D_n. On a $\mathcal{A}/W = \{\mathcal{C}\}$. Gardons les notations du premier chapitre et fixons $(m_{\mathcal{C},0}, m_{\mathcal{C},1}) \in \mathbb{Z}^2$. On peut en fait supposer que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ est la $\mathbb{Z}[y, y^{-1}]$-algèbre avec générateurs :

- générateurs : $T_1, \ldots, T_n$,
- relations : relations de tresses symbolisées par le diagramme suivant :

D_n



et les relations quadratiques

$$(T_i - q^{m_{\mathcal{C},0}})(T_i + q^{m_{\mathcal{C},1}}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Une observation remarquable est que tout groupe de Weyl de type D_n peut être vu comme sous-groupe d'un groupe de Weyl de type B_n. En particulier, l'ensemble Λ paramétrant les modules simples de l'algèbre de groupe peut être ici obtenu à partir de l'ensemble des bipartitions de n, ensemble indexant les modules simples en type B_n. Concrètement, on a ici :

$$\Lambda = \left\{[\lambda^0, \lambda^1] \mid (\lambda^0, \lambda^1) \in \Pi^2(n),\ \lambda^0 \neq \lambda^1\right\} \sqcup \left\{[\lambda, \pm] \mid (\lambda, \lambda) \in \Pi^2(n)\right\}$$

où $[\lambda^0, \lambda^1] = [\lambda^1, \lambda^0]$ pour tout $(\lambda^0, \lambda^1) \in \Pi^2(n)$ tel que $\lambda^0 \neq \lambda^1$ (voir [31, Ex 5.9] et [31, §6] pour plus de détails).

Au niveau des algèbres de Hecke, l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ peut être vue comme une sous-algèbre d'une algèbre de Hecke de type B_n (voir [31, §6]). Sur $K(y) = \mathbb{Q}(y)$, le module simple de l'algèbre de Hecke de type B_n indexé par une bipartition (λ^0, λ^1) se restreint

- en un $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-module simple si $\lambda^0 \neq \lambda^1$ que l'on indexe par $[\lambda^0, \lambda^1]$ (le module obtenu est alors isomorphe à la restriction du module simple de l'algèbre de Hecke de type B_n indexé par la bipartition (λ^1, λ^0)).
- en une somme directe de deux $K(y)\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$-modules simples si $\lambda := \lambda^0 = \lambda^1$, modules que l'on indexe par $[\lambda, +]$ et $[\lambda, -]$.

Soit θ une spécialisation dans un corps k. On peut supposer par la Prop. 2.2.3 que k est de caractéristique 0 et par le Théorème 2.3.2, que $a := m_{\mathcal{C},0} - m_{\mathcal{C},1} > 0$ et que $\theta(q)^a$ est une racine de l'unité d'ordre $e > 1$. Alors, la théorie de Clifford s'applique toujours mais il est beaucoup plus difficile de savoir comment les restrictions des modules simples d'algèbres de Hecke de type B_n se comportent. Par contre, par des résultats de Geck [31], on sait que les ensembles basiques se comportent "bien" vis à vis de cette théorie de Clifford. On obtient finalement le résultat suivant :

Théorème 4.1.2 (Geck [31], Jacon [54])**.** *Soit W le groupe de Weyl de type D_n. On se place sous les hypothèses ci-dessus. Alors,*

– *si e est impair, on a*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \left\{[\lambda^0, \lambda^1] \mid \lambda^0 \in \mathrm{Reg}_e(k),\ \lambda^1 \in \mathrm{Reg}_e(n-k),\ k \in [0, n]\right\}$$

$$\bigsqcup \{[\lambda, \pm] \mid \lambda \in \mathrm{Reg}_e(n/2)\}\,.$$

– *Si e est pair, on a*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \left\{[\lambda^0, \lambda^1] \mid (\lambda^0, \lambda^1) \in \Phi_e^{(e/2,0)}(n)\right\} \sqcup \left\{[\lambda, \pm] \mid (\lambda, \lambda) \in \Phi_e^{(e/2,0)}(n)\right\},$$

où $\Phi_e^{(d+p_0e,0)}$ désigne l'ensemble des bipartitions d'Uglov.

Le résultat ci-dessus a été le premier résultat de paramétrisation des modules simples en type D_n. Notons qu'elle est non récursive car elle fait intervenir les bipartitions FLOTW. Depuis, Hu a obtenu une autre paramétrisation naturelle récursive [48] utilisant la notion de bipartitions Kleshchev.

Dans la section suivante, nous nous demandons dans quelles mesures ces résultats peuvent se généraliser aux algèbres de Hecke de groupes de réflexions complexes de la série $G(l, 1, n)$ et plus généralement de la série $G(l, p, n)$.

4.2 Le cas des groupes de réflexions complexes

Le but de cette section est de généraliser les résultats de paramétrisations des modules simples pour les algèbres de Hecke de groupes de Weyl aux groupes de réflexions complexes de la série $G(l, 1, n)$ puis de la série $G(l, p, n)$.

Un corollaire immédiat du théorème 3.2.3 montre l'existence d'ensemble basique pour les algèbres d'Ariki-Koike associées à une spécialisation cyclotomique particulière ([53]). De plus, les ensembles basiques associés sont donnés par l'ensemble des multipartitions FLOTW, ensemble qui paramètre naturellement le cristal d'une réalisation particulière d'un module de plus haut poids. Une question naturelle serait alors de savoir si *toutes* les multipartitions de Uglov ont une interprétation similaire en termes de représentations d'algèbres d'Ariki-Koike. Ce problème est traité dans [57] dont le résultat principal est le suivant.

Fixons $e \in \mathbb{N}$ et une multicharge $\mathbf{v} := (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. On pose

$$m_{\mathcal{C}',0} = 1,\ m_{\mathcal{C}',1} = 0,$$

et pour tout $j = 0, \dots, l-1$,

$$m_{\mathcal{C},j} = v_j - je/l.$$

Le résultat suivant généralise le théorème 3.2.3 où l'on supposait $(v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathcal{D}$.

Théorème 4.2.1 (Jacon [57]). *Supposons que $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. Alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_{\mathbf{v}}^e$, on a*

$$G(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = |\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}\rangle + \textit{Combinaison linéaire de } |\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}\rangle \textit{ avec } a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\mu}) > a^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

La preuve de ce résultat est différente de celle du théorème 3.2.3, l'idée est ici d'étudier l'involution de l'espace de Fock donnée par Uglov et de montrer sa compatibilité avec la a-fonction. Les résultats d'Uglov sont donc déterminants dans cette optique. On obtient ainsi la triangularité de la base canonique par rapport à cette fonction (triangularité qu'Uglov avait déjà obtenue avec un ordre différent de celui considéré ici). On en déduit alors par le théorème d'Ariki le résultat suivant :

Corollaire 4.2.2 (Jacon [57]). *Supposons que* $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$ *et* $e > 1$. *Posons*

$$m_{\mathcal{C}',0} = 1, \; m_{\mathcal{C}',1} = 0$$

et pour tout $j = 0, \dots, l-1$,

$$m_{\mathcal{C},j} = v_j - je/l$$

Soit θ *une spécialisation dans un corps de caractéristique* 0 *telle que* $\theta(q)$ *est une racine de l'unité d'ordre* $e > 1$. *Alors l'algèbre de Hecke cyclotomique* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ *admet un ensemble basique par rapport à* θ *et on a*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta) = \Phi_e^{\mathbf{v}}(n)$$

On désirerait maintenant utiliser cette paramétrisation pour le type $G(l, 1, n)$ afin d'en déduire une paramétrisation naturelle des modules simples pour les algèbres de Hecke du groupe de réflexions complexes $G(l, p, n)$. Pour ceci, on s'inspire du passage du type B_n au type D_n en généralisant des résultats provenant de la théorie de Clifford et en étudiant les matrices de décomposition. Dans [41], après avoir étudié une extension de la théorie de Clifford au cas modulaire (i.e non semi-simple), on en déduit la paramétrisation désirée, non récursive. Bien que la combinatoire utilisée ici soit une simple généralisation de celle déjà évoquée en type D_n, elle est relativement longue à exposer, nous renvoyons donc à l'article [41] pour plus de précisions sur la paramétrisation explicite (qui s'obtient à partir des multipartitions de Uglov).

Théorème 4.2.3 (Genet-Jacon [41]). *Soit* $k\mathcal{H}$ *une algèbre de Hecke déployée de type* $G(l, p, n)$ *sur un corps* k *de caractéristique nulle. Alors, pour paramétrer les* $k\mathcal{H}$*-modules simples, on peut se ramener au cas où il existe une algèbre de Hecke cyclotomique* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ *et une spécialisation* θ *telle que* $k\mathcal{H}_{\mathbf{m}} = k\mathcal{H}$. *L'algèbre* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}}$ *admet un ensemble basique par rapport à* θ *qui paramètre donc les* $k\mathcal{H}$*-modules simples.*

Notons que Hu [49] a depuis proposé une autre paramétrisation récursive utilisant la notion de multipartitions Kleshchev en se servant des résultats énoncés ci-dessus. Enfin, remarquons que cette section permet de donner des paramétrisations explicites pour les modules simples d'algèbres de Hecke de type $G(l, p, n)$ en utilisant la théorie des ensembles basiques. Or, dans le cas des groupes de Weyl, cette théorie est intimement liée à l'existence d'une théorie des algèbres cellulaires appropriée et d'une théorie de Kazhdan-Lusztig qui manque toujours dans le cadre général. Ceci donne donc un indice à l'existence de telles théories dans le cadre général.

Dans la prochaine partie, nous revenons au cas du type B_n où nous étudions plus précisément les liens entre les différentes paramétrisations possibles des modules simples obtenues par la théorie des ensembles basiques. Nous donnons également quelques connexions, pour certains conjecturales, avec la théorie de Kazhdan-Lusztig.

4.3 Bijections d'ensembles basiques et représentations constructibles

Dans cette partie, on suppose que W est le groupe de Weyl de type B_n. Grâce aux travaux exposés dans le paragraphe §2.3, lorsque l'on étudie les représentations modulaires des algèbres de Hecke de ce type et en particulier les ensembles basiques, nous pouvons supposer que nous sommes dans le cas suivant :

$$a := m_{\mathcal{C}_2,0} - m_{\mathcal{C}_2,1} > 0 \text{ et } b := m_{\mathcal{C}_1,0} - m_{\mathcal{C}_1,1}.$$

Si θ est une spécialisation dans un corps de caractéristique 0 tel que $\theta(q)^a$ est une racine de l'unité d'ordre e, on sait que l'on a l'existence d'un ensemble basique $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}(\theta)$. Cet ensemble dépend de e et de la valeur $b/a \in \mathbb{Q}$. Nous le notons à présent $\mathcal{B}_e^{b/a}$.

On remarque que si l'on change de paramètres en remplaçant b par $b+ate$ avec $t \in \mathbb{Z}$ ou bien par $-b+ate$ avec $t \in \mathbb{Z}$, les algèbres spécialisées sont isomorphes (ou mêmes égales). Les matrices de décomposition sont donc identiques dans tous ces cas. Ceci définit une bijection entre les différents ensembles basiques. Plus formellement, notons :

$$\mathcal{L} = \{\pm b/a + te \mid t \in \mathbb{Z}\} .$$

Soit $\widehat{\mathfrak{S}}_2$ le groupe de Weyl affine étendu avec générateurs σ et y_1, y_2 et avec relations

$$y_1 y_2 = y_2 y_1, \quad \sigma^2 = 1, \quad y_1 = \sigma y_2 \sigma.$$

On a une action de $\widehat{\mathfrak{S}}_2$ sur $\mathcal{L}$ définie comme suit. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\sigma.(\pm b/a + te) = \mp b/a - te, \quad y_1.(b/a + te) = b/a + (t+1)e,$$

$$y_1.(-b/a + te) = -b/a + (t+1)e$$

On obtient une action de $\widehat{\mathfrak{S}}_2$ sur l'ensemble des ensembles basiques : si $w \in \widehat{\mathfrak{S}}_2$ et $\gamma \in \mathcal{L}$:

$$w.\mathcal{B}_e^{\gamma} = \mathcal{B}_e^{w.\gamma}$$

La question est alors de décrire explicitement cette action, dans un esprit similaire au problème des isomorphismes de cristaux vu dans le paragraphe §3.3.

Théorème 4.3.1 (Jacon [59])**.** *Soit $\gamma \in \mathcal{L}$ alors on a un algorithme explicite pour le calcul des actions de y_0 et σ sur $\mathcal{B}_e^{\gamma}$.*

Les algorithmes ci-dessus sont semblables aux algorithmes décrits dans §3.3 pour les isomorphismes de cristaux. Comme dans ce paragraphe, le plus délicat à expliciter est l'action de y_1. Dans [59], nous remarquons que le théorème 3.4.1 de factorisation de Geck-Rouquier montre en fait que la matrice de décomposition ci-dessus se factorise par la matrice des représentations constructibles. Ce type de représentations définies par Lusztig (voir [70, §22.1] et [59, 2.1]) joue un rôle important en théorie des représentations des algèbres de Hecke, en particulier en théorie de Kazhdan-Lusztig. Or, il se trouve que la matrice de ces représentations est aisément calculable grâce aux résultats de Leclerc et Miyachi [68]. Dans [59], nous montrons qu'il y a essentiellement deux façons d'ordonner les lignes de cette matrice et que, si l'on ordonne suivant un de ces ordres, on obtient une matrice triangulaire. Comme en théorie des ensembles basiques, ceci fournit donc deux moyens d'indexer naturellement les représentations constructibles par deux sous-ensembles de bipartitions $\mathcal{B}_{e,+}^{\gamma}$ et $\mathcal{B}_{e,-}^{\gamma}$. On a donc une bijection Ψ entre ces deux ensembles. Dans [59], nous montrons que $\mathcal{B}_e^{\gamma}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}_{e,+}^{\gamma}$ et que la bijection recherchée entre $\mathcal{B}_e^{\gamma}$ et $y_1.\mathcal{B}_e^{\gamma}$ n'est autre que la restriction de Ψ à $\mathcal{B}_e^{\gamma}$. Ceci peut se résumer par le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.2 (Jacon [59])**.** *L'action de y_1 sur les ensembles basiques est "contrôlée" par la matrice des représentations constructibles.*

On peut bien sûr se demander si ces résultats peuvent se généraliser pour la série des groupes de réflexions complexes $G(l, 1, n)$. Malheureusement, nous ne disposons pas de théorie de Kazhdan-Lusztig pour ces types. Par exemple, un analogue de la classe des représentations constructibles pour ces groupes reste mystérieux, même si une définition est disponible [72, déf. 2.2] utilisant la notion de familles récemment étudiée dans [18]. Certains résultats sur les algèbres de Cherednik (prouvant des liens avec la théorie de Kazhdan-Lusztig dans le cadre des groupes de Weyl) pourraient cependant permettre une généralisation [42].

4.4 Ensembles basiques et théorie de Kazhdan-Lusztig

Certains résultats récents de M. Geck [33] établissent l'existence de structures cellulaires pour les algèbres de Hecke. Nous nous plaçons une nouvelle fois dans le cadre du type B_n où la liberté dans le choix des paramètres rend la théorie des représentations particulièrement riche. Nous suivons la présentation adoptée dans [14, §5.1] et nous supposons les conjectures de Lusztig ($\mathbf{P1} - \mathbf{P15}$) vérifiées.

Pour tout choix d'irrationnel strictement positif ξ, on peut associer un ordre $\leq_\xi$ sur $\mathbb{Z}^2$ en posant

$$(c_1, c_2) \leq_\xi (d_1, d_2) \iff c_1 + \xi c_2 \leq d_1 + \xi d_2$$

Cet ordre permet de définir une structure cellulaire sur l'algèbre de Hecke de type B_n définie sur $\mathbb{Z}[y, y^{-1}]$, par les résultats de Geck. Les cellules associées ont été étudiées dans [11, 12, 13, 79]. On a donc un ensemble de modules de Specht dépendant du paramètre ξ :

$$\left\{ S_\xi^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Pi^2(n) \right\}$$

Ainsi, il existe ainsi *plusieurs* familles de modules de Specht pour la même algèbre de Hecke définies à l'aide de la théorie de Kazdhan-Lusztig. Dans [14], nous conjecturons que chacune de ces familles est liée à une structure de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-module sur l'espace de Fock (voir notament la conjecture sur la filtration de Jantzen déjà évoquée après le théorème 3.4.2), ou à une réalisation du $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-module irréductible de plus haut poids associé. Chacune de ces structures cellulaires pourrait également être liée à l'existence d'algèbres de Schur comme obtenues dans [44, 80] et à des extensions de la conjecture d'Yvonne [85].

Après spécialisation, si on fixe $\xi \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$, la théorie des algèbres cellulaires fournit un ensemble de modules simples (qui sont des quotients de modules de Specht) indexés par un ensemble de bipartitions dépendant de ξ. De plus, pour deux irrationnels positifs, ξ et ξ', on obtient deux ensembles de modules simples indexés de manière différente pour la même algèbre. Ces ensembles sont donc en bijection naturelle. Dans [14], nous montrons que les réponses aux questions soulevées ici se déduisent essentiellement des phénomènes déjà observés et étudiés en théorie des ensembles basiques et de cristaux d'espaces de Fock dans le sens suivant.

Théorème 4.4.1 (Bonnafé-Jacon [14]). *On suppose les conjectures de Lusztig* ($\mathbf{P1} - \mathbf{P15}$) *vérifiées. Alors, les indexations des modules simples associés aux structures cellulaires correspondent aux ensembles basiques et donc aux multipartitions d'Uglov (pour un certain choix de paramètres). De plus, les bijections entre les indexations ci-dessus sont les bijections d'ensembles basiques étudiées dans §4.3.*

On se réfère à [14, §5] pour les résultats plus précis. Il serait intéressant d'obtenir d'autres structures cellulaires que celles définies dans [43] et [21] pour les algèbres d'Ariki-Koike (et donc "s'approcher" d'une théorie de Kazhdan-Lusztig pour les groupes de réflexions complexes).

Chapitre 5

Représentations d'algèbres de Hecke cyclotomiques et d'algèbres de Hecke affines

Dans ce dernier chapitre, nous étudions quelques nouvelles propriétés liées aux représentations d'algèbres de Hecke cyclotomiques, en particulier dans le cas de la série $G(l, 1, n)$. La première section concerne le cas $l = 2$, c'est-à-dire le cas des algèbres de Hecke de type B_n où nous établissons la preuve d'une conjecture de Dipper-James-Murphy concernant la caractérisation des bipartitions Kleshchev [6], bipartitions qui paramètrent naturellement les modules simples d'algèbres de Hecke de type B_n ([9]).

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à une généralisation, proposée par Fayers [24], de l'involution de Mullineux sur les algèbres d'Ariki-Koike [60]. En utilisant la théorie des cristaux et une nouvelle fois les différentes réalisations possibles des $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-modules de plus haut poids, on obtient un algorithme pour le calcul de cette involution. Ces idées sont ensuite exploitées pour décrire l'analogue de cette involution dans les algèbres de Hecke affines de type A dont les algèbres d'Ariki-Koike sont des quotients [61]. Grâce aux résultats de [7], nous fournissons en particulier un dictionnaire permettant de passer des représentations d'algèbres de Hecke affines à celles d'algèbres d'Ariki-Koike et réciproquement, généralisant des résultats de Vazirani [82]. De plus, nous donnons un lien entre cette involution et une involution remarquable du cristal en type A affine : l'involution de Kashiwara.

La dernière partie du chapitre étudie les représentations des algèbres de Hecke affines de type A [7]. Nous donnons la règle de branchement modulaire pour les modules simples de ces algèbres c'est-à-dire une description du socle des restrictions de modules simples.

5.1 La conjecture de Dipper-James-Murphy en type B

Parmi les différentes paramétisations possibles pour les modules simples d'algèbres d'Ariki-Koike données dans le chapitre précédent, une tient une place prépondérente : la paramétrisation par les multipartitions Kleshchev. En effet, par des résultats d'Ariki [2] et Ariki-Mathas [9], cette classe de multipartitions indexe les modules simples issus de la structure cellulaire de Dipper-James-Mathas [21] et Graham-Lehrer [43].

Dans un article de Dipper, James et Murphy [22] antérieur aux articles ci-dessus, une conjecture prédit que les bipartitions indexant les modules simples des algèbres de Hecke de type B_n sont données par les bipartitions e-restreintes. Nous nous réferons à [6, Déf.

2.10] pour la définition de telles multipartitions utilisant les tableaux de Young[1]. D'après les résultats d'Ariki et de Mathas [9], pour prouver cette conjecture, il faut et suffit de montrer que les bipartitions Kleshchev sont exactement les bipartitions e-restreintes.

Dans [6], nous prouvons ce résultat de façon purement combinatoire en nous servant d'une récente caractérisation des bipartitions Kleshchev obtenues par Ariki, Kreiman and Tsuchioka [5].

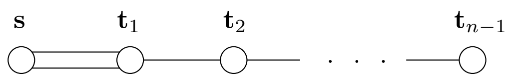
Théorème 5.1.1 (Ariki-Jacon [6])**.** *Les bipartitions Kleshchev sont exactement les bipartitions e-restreintes selon Dipper-James-Murphy.*

Ceci prouve ainsi la conjecture de Dipper-James-Murphy. Il est à noter que la généralisation de cette conjecture à la classe des multipartitions de Uglov comme exposée dans [6, Rem 4.4] reste ouverte, même si certains résultats [50, 53] résolvent partiellement le problème dans les cas où la multicharge est dans le domaine $\mathcal{D}$ de la partie 3.2 ou dans le cas $e = +\infty$ [50].

5.2 Involution de Mullineux

On se donne ici une algèbre d'Ariki-Koike où les paramètres sont des puissances d'un même nombre complexe $\eta \in \mathbb{C}^*$. Soit $\mathbf{v} := (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$. L'algèbre que l'on considère ici est définie sur $\mathbb{Q}(\eta)$ par :

- générateurs : $\mathbf{s}, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}$,
- relations : relations de tresses symbolisées par le diagramme suivant



et les relations :

$$(\mathbf{s} - \eta^{v_0})(\mathbf{s} - \eta^{v_1}) \dots (\mathbf{s} - \eta^{v_{l-1}}) = (\mathbf{t}_i - \eta)(\mathbf{t}_i + 1) = 0,\ i = 1, \dots, n-1.$$

On la note $\mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$. Cette algèbre est non semi-simple en général. On a cependant une construction des modules simples grâce à sa structure cellulaire déjè évoquée. On note e l'ordre de η.

Pour chaque l-partition $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^l(n)$, on a l'existence d'un $\mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-module $S^{\boldsymbol{\lambda}}$, appelé module de Specht indexé par $\boldsymbol{\lambda}$. Ces modules sont équipés d'une forme bilinéaire $\mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-invariante qui permettent de définir des quotients $D^{\boldsymbol{\lambda}} := S^{\boldsymbol{\lambda}}/\mathrm{rad}(S^{\boldsymbol{\lambda}})$. Notons $\Phi_e^{\mathbf{v}_\infty}$ l'ensemble de multipartitions $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ est non nul. Alors, on a :

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}) = \left\{ D^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}_\infty} \right\}.$$

La notation $\Phi_e^{\mathbf{v}_\infty}$ n'est pas anodine, elle désigne l'ensemble des multipartitions Kleshchev, multipartitions qui indexent le cristal d'une réalisation du $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-module irréductible de plus haut poids $\sum_{i=0}^{l-1} \Lambda_{v_i (\mathrm{mod}\ e)}$. Cette réalisation peut être vue comme une version "asymptotique" de celle déjà présentée dans les chapitres précédents. En particulier si on se donne $(u_0, \dots, u_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$ tels que $v_i \equiv u_i (\mathrm{mod}\ e)$ et tels que $u_i - u_{i-1} > n-1$ pour tout $i = 0, \dots, l-2$, on a $\Phi_e^{\mathbf{v}_\infty} = \Phi_e^{\mathbf{u}}$. Les multipartitions Kleshchev sont donc des cas particuliers de multipartitions d'Uglov.

Notons $\mathbf{v}^\sharp = (v_{l-1}, \dots, v_0)$ et $\mathbb{Q}(\eta)\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{v}^\sharp}$ l'algèbre d'Ariki-Koike avec générateurs $\widetilde{\mathbf{s}}$,$\widetilde{\mathbf{t}}_1$, ...,$\widetilde{\mathbf{t}}_{l-1}$ et relations de tresses comme ci-dessus couplées avec les suivantes :

$$(\widetilde{\mathbf{s}} - \eta^{-v_{l-1}})(\widetilde{\mathbf{s}} - \eta^{-v_{l-2}}) \dots (\widetilde{\mathbf{s}} - \eta^{-v_0}) = (\mathbf{t}_i - \eta^{-1})(\mathbf{t}_i + 1) = 0,\ i = 1, \dots, n-1$$

[1]Remarquons que, en utilisant cette définition, il se peut qu'une bipartition (λ^0, λ^1) soit non e-restreinte même si λ^0 et λ^1 le sont.

Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^l(n)$, on a un module de Specht associé $\widetilde{S}^{\boldsymbol{\lambda}}$ et si $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{(\mathbf{v}^\sharp)\infty}$ un $\mathbb{Q}(\eta)\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{v}^\sharp}$-module simple $\widetilde{D}^{\boldsymbol{\lambda}}$. On obtient un isomorphisme $\theta : \mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}} \to \mathbb{Q}(\eta)\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{v}^\sharp}$ tel que

$$\mathbf{s} \mapsto \widetilde{\mathbf{s}} \qquad \mathbf{t}_i \mapsto -q\widetilde{\mathbf{t}}_i \ (i = 1, \dots, n-1).$$

qui induit un foncteur F_l entre la catégorie des $\mathbb{Q}(\eta)\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-modules et celle des $\mathbb{Q}(\eta)\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{v}^\sharp}$modules. Ceci permet de définir une application bijective

$$m_l : \Phi_e^{\mathbf{v}\infty} \to \Phi_e^{(\mathbf{v}^\sharp)\infty},$$

telle que

$$F_l(\widetilde{D}^{m_l(\boldsymbol{\lambda})}) \simeq D^{\boldsymbol{\lambda}},$$

Le bijection m_l a été définie et étudiée par Fayers dans [24]. Elle généralise l'involution de Mullineux pour le groupe symétrique (dont une description est donnée dans [77, 27]). Comme pour ce cas particulier, il est possible de donner un algorithme la calculant dans le même esprit que celui de Kleshchev [65] en utilisant des chemins dans les cristaux des $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-modules irréductibles de plus hauts poids $\sum_{i=0}^{l-1} \Lambda_{v_i (\text{mod } e)}$ et $\sum_{i=0}^{l-1} \Lambda_{-v_i (\text{mod } e)}$ comportant les multipartitions Kleshchev $\Phi_e^{\mathbf{v}\infty}$ et $\Phi_e^{(\mathbf{v}^\sharp)\infty}$.

Dans [60], nous donnons une nouvelle description de l'involution m_l qui n'utilise pas la donnée des cristaux. L'idée essentielle est de traduire le problème de Mullineux en termes de problèmes d'isomorphismes de cristaux puis d'utiliser les résultats de [62] déjà exposés dans la partie §3.3.

Un algorithme de calcul est ainsi présenté dans l'esprit de l'algorithme original de Mullineux [77] pour le groupe symétrique. Celui-ci peut se présenter de la manière suivante : Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}\infty}$, on désire calculer $m_l(\boldsymbol{\lambda})$.

- A $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi_e^{\mathbf{v}\infty}$, on associe la multipartition $\nu = (m_1(\lambda^0), \dots, m_1(\lambda^{l-1}))$ qui est dans $\Phi_e^{(-\mathbf{v})\infty}$ (notons que l'algorithme de Mullineux [77] donne une procédure très rapide pour le calcul de m_1, algorithme qui n'utilise pas la notion de cristaux).
- A $\boldsymbol{\nu} \in \Phi_e^{(-\mathbf{v})\infty}$, on associe $\boldsymbol{\mu} \in \Phi_e^{(\mathbf{v}^\sharp)\infty}$ en utilisant les algorithmes décrits dans [58, 62] permettant de calculer les isomorphismes de cristaux.

On obtient alors $\boldsymbol{\mu} = m_l(\boldsymbol{\lambda})$ et donc la procédure désirée. Notons que celle-ci se simplifie considérablement quand e est grand et lorsque $e = \infty$. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 5.2.1 (Jacon-Lecouvey [60]). *On a un algorithme purement combinatoire n'utilisant pas la notion de cristaux pour le calcul de l'involution de Mullineux sur les algèbres d'Ariki-Koike.*

Nous étudions maintenant l'analogue de cette involution pour les algèbres de Hecke affines de type A.

5.3 Algèbres de Hecke affines de type A

Nous nous intéressons ici à l'algèbre de Hecke affine $\widehat{H}_n$ de type A sur $\mathbb{C}$ à paramètre $\eta \in \mathbb{C}^*$. C'est une algèbre associative unitaire avec générateurs

$$T_1, \dots, T_{n-1}, X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}$$

et relations :

$$\begin{aligned}
&T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1},\\
&T_iT_k = T_iT_k,\\
&(T_i-\eta)(T_i+1)=0,\\
&T_iX_iT_i = \eta X_{i+1},\\
&T_iX_k = X_kT_i,\\
&X_iX_k = X_kX_i,
\end{aligned}$$

et $X_iX_i^{-1} = 1 = X_i^{-1}X_i$ pour tous i et k tels que $|i-k|>1$.

L'algèbre $\widehat{H}_n$ a la propriété remarquable suivante : Pour tout $\mathbf{v} = (v_0, \dots v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$, toute algèbre d'Ariki-Koike $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$ comme dans la section précédente est un quotient de $\widehat{H}_n$, on a

$$\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}} \simeq \widehat{H}_n / \prod_{0\leq i\leq l-1} (X_1 - \eta^{v_i}).$$

On s'intéresse ici à une certaine catégorie de $\widehat{H}_n$-modules Rep_q dont les modules simples sont donnés par

$$\{L_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_e\},$$

où $\mathfrak{M}_e$ est l'ensemble des multisegments apériodiques (voir la définition dans [61, §2]). Un premier problème que l'on peut se poser est de déterminer les connexions entre l'ensemble de ses modules simples et ceux des algèbres d'Ariki-Koike. En effet, tout $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-module simple est aussi un $\widehat{H}_n$-module simple. Mieux, en fait, les $\widehat{H}_n$-modules simples de Rep_q sont précisément les $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-modules où $\mathbf{v} := (v_0, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{Z}^l$ et $l \in \mathbb{N}$. Le résultat suivant est une généralisation d'un résultat de Vazirani (correspondant au cas $e = +\infty$).

Théorème 5.3.1 (Ariki-Jacon-Lecouvey [7], Jacon-Lecouvey [61], Vazirani [82])**.** *Pour tout multisegment $\mathfrak{m}$ apériodique, on a une procédure explicite et combinatoire pour déterminer tous les couples $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{Z}^l \times \Phi_e^{\mathbf{v}_\infty}$ tels que comme $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-modules, on a $L_{\mathfrak{m}} \simeq D^{\boldsymbol{\lambda}}$. Réciproquement, pour tout $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{Z}^l \times \Phi_e^{\mathbf{v}_\infty}$, il existe un unique multisegment $\mathfrak{m}$ apériodique et calculable explicitement tel que comme $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-modules, on a $L_{\mathfrak{m}} \simeq D^{\boldsymbol{\lambda}}$.*

Ce théorème est une des clefs pour déterminer la règle de branchement modulaire pour les algèbres de Hecke affine de type A. Le théorème décrivant cette règle est montré dans [7] de deux manières différentes, combinatoire et géométrique. L'énoncé fait intervenir l'opérateur de Kashiwara $\widetilde{e}_i$, défini grâce à la structure de cristal que l'on peut mettre sur l'ensemble $\mathfrak{M}_e$, le cristal associé $B_e(\infty)$ étant en fait le cristal de la partie négative de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$.

Théorème 5.3.2 (Ariki-Jacon-Lecouvey [7])**.** *Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_e$, on a :*

$$\mathrm{Soc}(\mathrm{Res}_{\widehat{H}_{n-1}}^{\widehat{H}_n}(L_{\mathfrak{m}})) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} L_{\widetilde{e}_i\mathfrak{m}}$$

où $\mathrm{Res}_{\widehat{H}_{n-1}}^{\widehat{H}_n}$ désigne l'opération de restriction des $\widehat{H}_n$-modules aux $\widehat{H}_{n-1}$-modules.

Nous nous intéressons maintenant à l'analogue de l'involution de Mullineux pour l'algèbre de Hecke affine de type A. Nous tentons de déterminer une description explicite de celle-ci dans le même esprit que dans la section §3.3.

5.4 L'involution de Zelevinsky

Gardons les notations de la section précédente. L'involution de Zelevinsky est une certaine application qui a ses origines en représentations des groupes p-adiques. Elle peut se définir comme une involution τ de $\widehat{H}_n$ comme suit :

$$T_i^\tau = -\eta T_{n-i}^{-1},\ X_j^\tau = X_{n+1-j},$$

pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$. Elle induit une involution sur $\tau : \mathfrak{M}_e \to \mathfrak{M}_e$:

$$L_{\mathfrak{m}^\tau} \simeq L_{\mathfrak{m}}^\tau$$

que nous appellons également involution de Zelevinsky. Celle-ci a été étudiée entre autre par Moeglin-Waldspurger [74] et Vigneras [83]. Dans [67], Leclerc, Thibon et Vasserot ont montré que τ peut être décrit en utilisant $B_e(\infty)$, cristal de la partie négative de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$, dans le même esprit que l'algorithme de Kleshchev [65] et de Fayers [24] donnant l'involution de Mullineux.

Dans [61], nous donnons une procédure alternative pour calculer cette involution. Celle-ci peut être vue comme une généralisation d'un algorithme donné par Moeglin et Waldspurger dans le cas $e = \infty$. Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment apériodique indexant un $\widehat{H}_n$-module simple $L_{\mathfrak{m}}$.

1. A $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_e$, on associe un l-uplet d'entier $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^l$ et $\lambda \in \Phi_e^{\mathbf{v}}$ tel que comme $\mathbb{C}\mathcal{H}^{\mathbf{v}}$-modules, on a $L_{\mathfrak{m}} \simeq D^{\boldsymbol{\lambda}}$ grâce au théorème 5.3.1. Notons qu'on dispose a priori de plusieurs choix mais afin de considérablement améliorer la rapidité de l'algorithme, il est important de choisir une multicharge $\mathbf{v}$ de niveau minimal. Une procédure est présentée afin de trouver cette multicharge optimale.
2. On applique l'algorithme 5.2.1 calculant l'involution de Mullineux à $\boldsymbol{\lambda}$, on obtient une l-partition $\boldsymbol{\mu} = m_l(\boldsymbol{\lambda})$
3. A μ, on associe le multisegment $\mathfrak{m}'$ comme dans le théorème 5.3.1.

Théorème 5.4.1 (Jacon-Lecouvey [61])**.** *L'image de* $\mathfrak{m}$ *sous l'involution de Zelevinsky est* $\mathfrak{m}'$.

Les calculs impliqués dans la procédure ci-dessus n'utilisent pas la théorie des cristaux et sont purement combinatoires. De plus, on obtient une relation très simple entre l'involution de Zelevinsky et une involution remarquable du cristal : l'involution de Kashiwara.

Corollaire 5.4.2 (Jacon-Lecouvey [61])**.** *L'involution de Zelevinsky est égale à l'involution de Kashiwara sur les multisegments indexant le cristal* $B_e(\infty)$.

Ceci permet d'établir un nouveau lien entre théorie des représentations algèbres de Hecke et théorie des cristaux et bases canoniques de groupes quantiques.

Bibliographie

[1] S. Ariki, On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. J. Math. Kyoto Univ., 36, no.4 : 789-808, 1996.

[2] S. Ariki, On the classification of simple modules for Cyclotomic Hecke algebras of type $G(m, 1, n)$ and Kleshchev multipartitions. Osaka J. Math., 38 : 827-837, 2001.

[3] S. Ariki, Representation theory of a Hecke algebra of $G(r, p, n)$. J. Algebra 177 (1995), no. 1, 164–185.

[4] S. Ariki, Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux. University Lecture Series, 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] S. Ariki, V. Kreiman et S. Tsuchioka, On the tensor product of two basic representations of $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$. Adv. Math. 218 (2008), no. 1, 28–86.

[6] S. Ariki et N. Jacon, Dipper-James-Murphy's conjecture for Hecke algebras of type B_n. Accepté à Progress in Math. Birkauser, "Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups" 2007, `http://arXiv.org/abs/math.RT/0703447`.

[7] S. Ariki, N. Jacon et C. Lecouvey, The modular branching rule for affine Hecke algebras of type A. Prépublication 2008, `http://arxiv.org/abs/0808.3915`.

[8] S. Ariki, N. Jacon et C. Lecouvey, Compatibility of canonical bases in higher level Fock spaces. Prépublication 2010, `http://arxiv.org/abs/0909.2954`

[9] S. Ariki, A. Mathas, The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r, 1, n)$. Math. Z., 233, no.2 : 601-623, 2000.

[10] D. Bessis, Zariski theorems and diagrams for braid groups. Invent. Math. 145 (2001), no. 3, 487–507.

[11] C. Bonnafé, On Kazhdan-Lusztig cells in type B. J. Algebr. Comb (2010), 31 : 51-82.

[12] C. Bonnafé, M. Geck, L. Iancu et T. Lam, On domino insertion and Kazhdan-Lusztig cells in type B_n. Progress in Maths,à paraître (2010).

[13] C. Bonnafé et L .Iancu, Left cells in type B_n with unequal parameters. Represent. Theory 7 (2003), 587-609.

[14] C. Bonnafé et N. Jacon, Cellular structures on Hecke algebras of type B_n. J. Algebra, 321 (2009), 3089-3111.

[15] M. Broué et S. Kim, Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques. Adv. Math. 172 (2002), no. 1, 53–136.

[16] J. Brundan et S. Kleshchev, Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras. Advances in Math. 222 (2009), 1883-1942, pdf

[17] J. Brundan, S. Kleshchev et W. Wang, Graded Specht modules. preprint 2009.

[18] M. Chlouveraki, Blocks and families for cyclotomic Hecke algebras. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1981, 2009.

[19] M. Chlouveraki et N. Jacon, Schur elements and basic sets for cyclotomic Hecke algebras. Prépublication 2009 http://arxiv.org/abs/0910.4931.

[20] R. Dipper et G. D. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups. Proc. London Math. Soc. **52** (1986), 20–52.

[21] R. Dipper, G. James, E. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras. Math. Z., 229-3 : 385-416, 1998.

[22] R. Dipper, G. James et E. Murphy, Hecke algebras of type B_n at roots of unity. Proc.L.M.S, 70 : 505-528, 1995.

[23] R. Dipper, A. Mathas, Morita equivalences of Ariki-Koike algebras. Math.Z., 240, no. 3, 579-610 : 2002.

[24] M. Fayers, Weights of multipartitions and representations of Ariki-Koike algebras. II. Canonical bases. J. Algebra 319 (2008), no. 7, 2963–2978.

[25] M. Fayers, An LLT-type algorithm for computing higher-level canonical bases. Prépublication 2009.

[26] O. Foda, B. Leclerc, M. Okado, J-Y. Thibon et T. Welsh, Branching functions of $A^{(1)}_{n-1}$ and Jantzen-Seitz problem for Ariki-Koike algebras. Advances in Mathematics **141** (1999), 322-365.

[27] B.. Ford et A. Kleshchev, A proof of the Mullineux conjecture. Math. Z. **226** (1997), no. 2, 267–308.

[28] M. Geck, *Brauer trees of Hecke algebras*. Comm. Algebra, 20, no. 10 : 2937-2973, 1992.

[29] M. Geck, *The decomposition numbers of the Hecke algebra of type E_6*. Comp. Math., 61, no. 204 : 889-899, 1993.

[30] M. Geck, Kazhdan-Lusztig cells and decomposition numbers. Represent. Theory **2** (1998), 264–277 (electronic).

[31] M. Geck, On the representation theory of Iwahori-Hecke algebras of extended finite Weyl groups. Representation theory (electronic journal), 4 : 370-397, 2000.

[32] M. Geck, Representations of Hecke algebras at roots of unity. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. Astérisque No. 252 (1998), Exp. No. 836, 3, 33–55.

[33] M. Geck, Hecke algebras of finite type are cellular. Invent. Math. 169 (2007), no. 3, 501–517.

[34] M. Geck, L. Iancu et G. Malle, Weights of Markov traces and generic degrees. Indag. Math. (N.S.) 11 (2000), no. 3, 379–397.

[35] M. Geck et N. Jacon, Canonical basic sets in type B_n. J. Algebra 306 (2006), no. 1, 104–127.

[36] M. Geck et N. Jacon, Representations of Hecke algebras at roots of unity. Livre en cours d'écriture (projet accepté par Springer Verlag).

[37] M. Geck, K. Lux, The decomposition numbers of the Hecke algebra of type F_4. Manuscripta Math., 70, no. 3 : 285-306, 1991.

[38] M. Geck et G. Pfeiffer, Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras. London Mathematical Society Monographs. New Series, 21. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. .

[39] M. Geck et R. Rouquier, Centers and simple modules for Iwahori-Hecke algebras. In : Finite reductive groups, related structures and representations (M. Cabanes, ed.), Progress in Math. 141, pp. 251-272. Birkhauser, Boston (1997).

[40] M. Geck et R. Rouquier, Filtrations on projective modules for Iwahori–Hecke algebras. *In* : Modular Representation Theory of Finite Groups (Charlottesville, VA, 1998 ; eds. M. J. Collins, B. J. Parshall and L. L. Scott), p. 211–221, Walter de Gruyter, Berlin 2001.

[41] M. Genet et N. Jacon, Modular representations of cyclotomic Hecke algebras of type $G(l,p,n)$. Int. Math. Res. Notices, Volume 2006 (2006), Article ID 93049, 18 pages

[42] I. Gordon, Quiver varieties, category $\mathcal{O}$ for rational Cherednik algebras, and Hecke algebras. Int. Math. Res. Pap. IMRP 2008, no. 3, Art. ID rpn006, 69 pp.

[43] J. Graham et G. Lehrer, Cellular algebras. Invent. Math., 123 : 1-34, 1996.

[44] V. Ginzburg, N. Guay, E. Opdam et R. Rouquier, On the category $\mathcal{O}$ for rational Cherednik algebras. Invent. Math. 154 (2003), no. 3, 617–651

[45] I. Grojnowski et M. Haiman, Affine Hecke algebras and positivity of LLT and Macdonald polynomials. Prépublication 2008.

[46] T. Halverson et A. Ram Murnaghan-Nakayama rules for Hecke algebras of the complex reflection groups $G(r,p,n)$. Canadian Journal of Mathematics. 50 (1998), 167-192.

[47] T. Hayashi, *q-analogues of Clifford and Weyl algebras*. Comm. Math. Phys., 127 : 129-144, 1990.

[48] J. Hu, Crystal bases and simple modules for Hecke algebra of type D_n, J. Algebra, 267 : 7-26, 2003.

[49] J. Hu, The number of simple modules for the Hecke algebras of type $G(r,p,n)$ (With an appendix by Xiaoyi Cui.) J. Algebra 321 (2009), no. 11, 3375–3396.

[50] J. Hu, On a generalization of Dipper–James–Murphy's Conjecture. Prépublication 2009.

[51] N. Jacon, Représentations modulaires des algèbres de Hecke et des algèbres de Ariki-Koike. Thèse de doctorat, Lyon I, 2004.

[52] N. Jacon, Programme GAP pour le calcul de la base canonique d'un $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module irréductible et pour les matrices de décomposition d'algèbres de Arki-Koike. 2004, page web du projet CHEVIE, `http://www.math.rwth-aachen.de/CHEVIE`.

[53] N. Jacon, On the parametrization of the simple modules for Ariki-Koike algebras at roots of unity. J. Math. Kyoto Univ. 44 (2004), no. 4, 729–767.

[54] N. Jacon, Sur les représentations modulaires des algèbres de Hecke de type D_n. J. Algebra 274 (2004), no. 2, 607–628.

[55] N. Jacon, Canonical basic sets for Hecke algebras. Infinite-dimensional aspects of representation theory and applications, 33–41, Contemp. Math., 392, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005

[56] N. Jacon, An algorithm for the computation of the decomposition matrices for Ariki-Koike algebras. J. Algebra (section Comp. Algebra) 292 (2005), 100-109.

[57] N. Jacon, Crystal graphs of higher level q-deformed Fock spaces, Lusztig a-values and Ariki-Koike algebras. Algebr. Represent. Theory 10 (2007), no. 6, 565–591.

[58] N. Jacon, Crystal graphs of irreducible $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-modules of level two and Uglov bipartitions. J. Algebraic Combin. 27 (2008), no. 2, 143–162.

[59] N. Jacon, Constructible representations and basic sets in type B_n. Prépublication 2009.

[60] N. Jacon et C. Lecouvey, On the Mullineux involution for Ariki-Koike algebras. J. Algebra (section Comp. Algebra) 321 (2009), 2156-2170.

[61] N. Jacon et C. Lecouvey, Kashiwara and Zelevinsky involutions in affine type A. Pacific J. Math., Vol. 243, No. 2, (2009), 287-311.

[62] N. Jacon et C. Lecouvey, Crystal isomorphisms for irreducible $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-modules of higher level. A paraître à Algebras and Rep Theory.

[63] M. Jimbo, K. C. Misra, T. Miwa et M. Okado, Combinatorics of representations of $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(n))$ at $q = 0$. Communication in Mathematical Physics **136** (1991), 543-566.

[64] M. Kashiwara, Bases cristallines des groupes quantiques. 9. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[65] A. Kleshchev, Branching rules for modular representations of symmetric groups III : some corollaries and a problem of Mullineux, J. Lond. Math. Soc. **54** (1996), 25-38.

[66] A. Lascoux, B. Leclerc et J-Y Thibon, Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras. Comm. Math. Phys. 181 (1996), no. 1, 205–263.

[67] B. Leclerc, J-Y. Thibon et E. Vasserot, Zelevinsky's involution at roots of unity. J. Reine Angew. Math. **513** (1999), 33–51.

[68] B. Leclerc et H. Miyachi, Constructible characters and canonical bases. J. Algebra 277 (2004), no. 1, 298–317.

[69] G. Lusztig, Introduction to quantum groups. Progress in Mathematics, 110. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[70] G. Lusztig, Hecke algebras with unequal parameters. CRM Monograph Series, 18. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[71] G. Malle, On the rationality and fake degrees of characters of cyclotomic algebras, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 6(1999), 647–677.

[72] G. Malle et R. Rouquier, Familles de caractères de groupes de réflexions complexes. Represent. Theory 7 (2003), 610–640 (electronic).

[73] A. Mathas, Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group, University Lectures Series, AMS, Providence, **15**, 1999.

[74] C. Moeglin et J-L. Waldspurger, Sur l'involution de Zelevinsky, J. Reine Angew. Math. **372** (1986) 136-177.

[75] J. Müller, Zerlegungszahlen für generische Iwahori-Hecke Algebren von exzeptionellem Typ. thèse de doctorat, Aachen, 1995.

[76] J. Müller, Decomposition numbers for generic Iwahori-Hecke algebras of noncristallographic type. J. Algebra, 125-149, 189, 1997.

[77] G. Mullineux, Bijections of p-regular partitions and p-modular irreducibles of the symmetric groups. J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), no. 1, 60–66.

[78] A. Nakayashiki et Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models. Selecta Math. (N.S.) 3 (1997), no. 4, 547–599.

[79] T. Pietraho, Module structure of cells in unequal parameter Hecke algebras, prépublication 2009.

[80] R. Rouquier, q-Schur algebras and complex reflection groups. Mosc. Math. J. 8 (2008), no. 1, 119–158, 184.

[81] D. Uglov, Canonical bases of higher-level q-deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials. Physical combinatorics (Kyoto, 1999), 249–299, Progr. Math., 191, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[82] M. Vazirani, Parameterizing Hecke algebra modules : Bernstein-Zelevinsky multisegments, Kleshchev multipartitions, and crystal graphs. Transform. Groups 7 (2002), no. 3, 267–303

[83] M-F. Vigneras, A propos d'une conjecture de Langlands modulaire, in Finite reductive groups : related structures and representations, Cabanes, Marc (ed.), Birkhauser 1997.

[84] X. Yvonne, An algorithm for computing the canonical bases of higher-level q-deformed Fock spaces. J. Algebra 309 (2007), no. 2, 760–785.

[85] X. Yvonne, A conjecture for q-decomposition matrices of cyclotomic v-Schur algebras. J. Algebra 304 (2006), no. 1, 419–456.

[86] A. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 2, 165–210.